

城市标度律及应用

龚健雅¹, 许刚¹, 焦利民², 秦昆¹

(1. 武汉大学遥感信息工程学院, 武汉 430079; 2. 武汉大学资源与环境科学学院, 武汉 430079)

摘要: 城市标度律刻画了城市系统某一指标和人口规模的幂函数缩放关系, 包括超线性(社会交互类指标)、次线性(基础设施类指标)和线性(个人需求类指标)3种标度关系。本文从城市标度律的验证、解释、应用和质疑4个方面总结梳理了2007—2020年间的研究进展, 重点分析了城市标度律和城市时序发展的异速增长律的明显差异, 单个城市时序发展不会遵循城市系统的截面标度律。城市规模修正指标为更加客观地评价城市表现提供了新思路。考虑城市规模效应后, 2017年中国经济产出效率较高的城市主要位于东南沿海、长江中游和新疆, 而东北和中原地区城市经济产出效率较低。城市标度律的机制解释、城市系统动态演化模型和城市内部标度律是未来值得关注的研究方向。

关键词: 城市地理学; 城市科学; 复杂城市系统; 标度律; 城市规模修正指标

DOI: 10.11821/dlxb202102001

1 引言

城市是一个典型复杂系统, 具有两层意义: 一是城市本身是一个复杂系统, 二是多个城市构成的城市体系也是一个复杂系统^[1]。传统的线性科学不能很好地认识、理解城市, 我们迫切需要新的城市科学^[2-3]。一个新的研究范式是关注不同历史、不同地理、不同文化、不同体制下城市所表现出的共同性质^[4]。标度律(Scaling Law)便是复杂城市系统背后的简单规律和机制之一^[5-7]。标度律是生物学、物理学、网络科学等复杂系统中普遍存在的规律^[8], 例如生物学中克莱伯定律(Kleiber's Law)指出成年哺乳动物的新陈代谢率和体重呈 $3/4$ 次幂函数关系^[9]。

城市标度律(Urban Scaling Law)是指城市体系内城市指标与人口规模的缩放关系, 反映的是城市体系的状态和特征, 而不是单个城市的性质。城市标度律通常为幂函数形式 $Y=Y_0N^\beta$, 其中 Y 为城市指标, N 为人口规模, β 被称为标度因子(Scaling Exponent)。根据标度因子 β 与1的关系可将城市指标分为3类^[6]: ①超线性指标($\beta > 1$): 与社会交互相关的城市指标(如GDP、知识产出、严重暴力犯罪等)的标度因子大于1(一般在1.15左右), 该类城市指标随城市人口规模呈超线性增长, 这是因为社会交互随人口增加呈超线性增长, 体现了规模报酬递增效应; ②次线性指标($\beta < 1$): 与城市基

收稿日期: 2019-07-30; 修订日期: 2020-12-26

基金项目: 教育部人文社会科学研究项目(20YJCZH195); 中国博士后科学基金(BX20190251, 2019M662699); 国家自然科学基金项目(41971368) [Foundation: Ministry of Education in China Project of Humanities and Social Sciences, No.20YJCZH195; China Postdoctoral Science Foundation, No.BX20190251, No.2019M662699; National Natural Science Foundation of China, No.41971368]

作者简介: 龚健雅(1957-), 男, 博士, 教授, 中国科学院院士, 长期从事地理信息理论和摄影测量与遥感基础研究。

E-mail: gongjy@whu.edu.cn

通讯作者: 许刚(1992-), 男, 博士, 博士后, 主要从事城市化与土地利用变化研究。E-mail: xugang@whu.edu.cn

基础设施相关的城市指标（如道路长度、加油站数量等）的标度因子小于1（一般在0.85左右），该类城市指标随人口规模呈次线性增长，这是因为大城市有更多居民共享城市基础设施，反映了规模经济效应；③ 线性指标（ $\beta = 1$ ）：与城市居民个人需求相关的城市指标（如工作岗位数量、家庭用水等）的标度因子等于1，该类城市指标随城市人口规模呈线性变化^[6]。

城市标度律研究很大程度上受到生命系统标度律研究的启发^[8]，Bettencourt等引领了城市标度律这一新的研究领域^[5-7]。近年来国内外学者在城市标度律领域取得了丰富的研究成果。本文研究目标包括3个方面：① 总结城市标度律的研究内容和进展；② 澄清城市标度律和异速增长律的区别；③ 展示城市标度律的应用。本文从城市标度律的验证、解释、应用和质疑4个方面总结了城市标度律的研究进展，重点分析了反映城市系统特征的城市标度律和刻画单个城市时序发展的异速增长律的本质差异；同时介绍了基于城市标度律的规模修正指标，并以中国地级市GDP和建成区面积为例展示了规模修正指标在城市排序和评价中的应用。

2 城市标度律研究进展

2.1 城市标度律的验证

虽然Bettencourt等总结了城市标度律，但也仅使用了有限的城市数据^[6]。此后研究者选取全球不同地区的城市进行了城市标度律的验证，包括欧洲^[10-11]、巴西^[4]、印度^[12]、中国^[13]等，结果均发现了稳健的城市标度律。除了不同区域的验证，还有历史时期的验证。Cesaretti等发现1280—1320年间欧洲城市的土地面积与人口规模存在次线性标度关系^[14]；甚至在古代社会，居住面积和人口规模也存在次线性标度关系^[15-16]。这充分说明了城市标度律是不受历史、地理、文化限制的城市系统普遍存在的规律。国内城市标度律的研究集中在城市土地面积与人口规模的标度关系^[17-18]，而关于其他城市指标的研究较少^[19-21]。

2.2 城市标度律的解释

城市标度律是不同历史、不同地理、不同文化下城市系统的共同性质，那么决定城市标度律形成的原因和机制是什么？一个可能找到答案的方向是网络科学。生命科学领域标度律研究的重要学者Geoffrey West指出网络是所有复杂系统背后的支撑，如生命系统的血管网络，城市的基础设施网络和社交网络等^[8]。Geoffrey West和合作者从网络科学视角提出了生命系统标度律的解释，包括3个假设：① 空间填充，即网络的触角需要到达所服务系统的各个角落；② 终端单元的恒定性，例如所有哺乳动物的毛细血管都是相同的，细胞大小也是相近的；③ 网络的优化，例如哺乳动物通过进化使得通过心脏为全身输送血液的平均能量消耗最小化^[8]。这对于理解和解释城市标度律具有重要借鉴意义。研究者从不同角度抽象城市实体网络和虚拟网络，尝试解释城市标度律产生的原因和机制^[5, 22-24]。但这些模型仍然只是城市标度律形成机制的可能解释之一，尚没有定论。

2.3 城市标度律的应用

城市标度律的核心观点是城市指标与人口规模呈非线性缩放关系，这挑战了传统采用人均指标（如人均GDP）评价城市的做法，因为人均指标的隐含假设是城市指标随城市规模呈线性关系^[25]。以GDP为例，即使在技术水平、产业政策等其他条件都相同的情况下，由于规模报酬递增效应的存在，大城市相对于中小城市仍然在人均水平上具有更多经济产出^[25]。对于大城市来说，其人均GDP超过中小城市并不一定说明该大城市的经济表现更好；只有跟同等规模的大城市相比，其人均GDP仍然较高，才说明其经济产出

效率高。这说明人均GDP更适合在同等规模城市之间比较,要比较不同规模城市的经济产出效率,则应该消除城市规模的影响。Bettencourt等基于城市标度律理论提出了规模修正指标(Scale-Adjusted Metropolitan Indicator, SAMI)^[25],并已被成功应用到经济产出、知识创新等领域的城市评价中^[26-30]。

2.4 城市标度律的质疑

研究发现复杂城市系统背后体现出一致性规律的同时,也有研究对城市标度律提出质疑^[4],主要包括3点:①不同城市范围下城市指标与人口规模间的标度因子与1的关系不稳定^[19, 31-32]。城市范围是一个复杂的、模糊的边界,加上城市人口的流动性,因此很难像测定生物体重一样准确测度城市的规模。②双对数下线性回归模型的适用性存疑^[33-35]。标度律本身是幂函数,大多数研究都将城市指标和人口规模取对数后采用线性函数拟合,线性拟合得到的标度因子和非线性拟合得到的幂函数指数存在差异。③城市指标与人口规模间的标度因子受宏观经济结构、公共政策等其他外部条件影响^[36-37]。值得强调的是,虽然城市标度律在某个具体方面存在质疑,但其已经成为新城市科学的重要定量规律之一。

3 城市标度律与异速增长律

3.1 城市标度律

前已述及,城市标度律反映的是同一时点城市系统内城市指标与人口规模的定量缩放关系,其函数形式是幂函数^[6, 25]:

$$Y = Y_0 N^\beta \quad (1)$$

式中: Y 为城市指标(如建成区面积、GDP等); N 为城市人口规模; Y_0 和 β 为参数,其中 β 为标度因子。对(1)式两边同时取对数,可以得到^[6, 25]:

$$\log Y = \beta \times \log N + \log Y_0 \quad (2)$$

式(2)为线性函数。因此可以对城市指标和人口规模取对数后采用线性函数拟合,拟合直线的斜率为标度因子 β 。双对数坐标下的线性拟合方法简单易操作,因而是城市标度律研究最常用的拟合方法^[6, 25]。

本文以中国城市为例,收集整理了291个地级市2017年城区常住人口、市辖区GDP和建成区面积数据,其中常住人口为城区的户籍人口和暂住人口之和^[38]。人口和土地数据来源于《中国城市建设统计年鉴》,GDP数据来源于《中国城市统计年鉴》。由于数据缺失,样本城市不包括重庆、东莞、儋州、中山、三沙、那曲6个地级市。本文实证研究不包括港澳台城市。

2017年中国291个地级市GDP和建成区面积与常住人口规模的标度关系如图1所示。尽管各城市的地理文化、历史沿革、人口规模具有明显差异,但各城市GDP和建成区面积与城市人口规模在双对数坐标下高度线性相关($R^2 > 0.84$),具有显著的标度关系,体现了复杂城市系统背后的简单规律。城市标度律的标度因子区分了不同城市指标与人口规模的标度范式(Scaling Regime)。GDP关于常住人口的标度因子为1.17,说明从小城市到大城市,GDP增加速度快于人口增加速度,体现了规模报酬递增的效应;而建成区面积关于常住人口的标度因子为0.87,说明在城市系统中,从小城市到大城市,城市土地增加慢于人口增加,体现了规模经济效益(图1)。

3.2 异速增长律

在城市研究领域,与城市标度律非常相近的另一个规律是异速增长律(Allometric

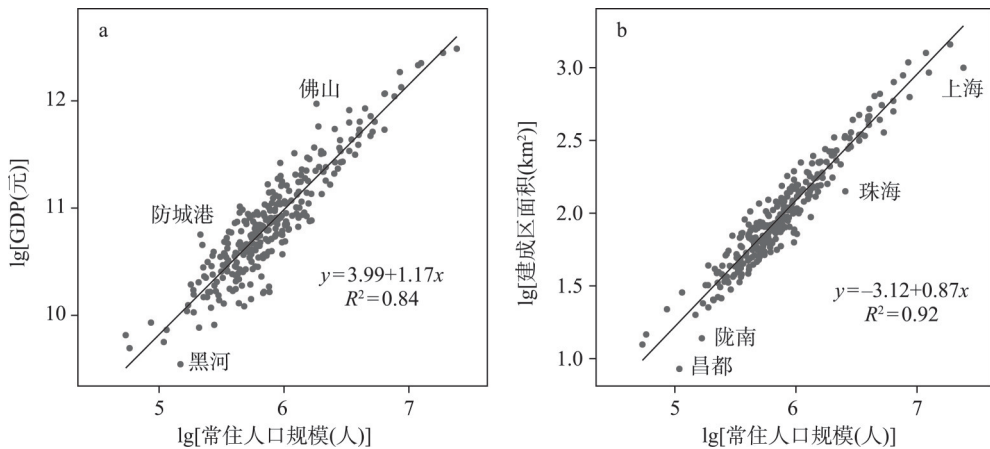


图1 2017年中国291个地级市GDP和建成区面积与常住人口的标度关系

Fig. 1 Scaling laws between GDP (built-up area) and urban population of 291 Chinese prefecture-level cities in 2017

Growth), 函数形式也为幂函数^[39]。异速增长最初是生物学领域指生物器官和个体随时间的不同步增长, 例如在螃蟹的成长过程中, 蟹(钳子)的长度与其甲壳的长度呈幂函数关系^[40]; 人类大脑相对于躯干的发育速度也是非线性关系^[39]。城市地理学家在20世纪70年代或更早引入异速增长律研究了城市系统内建设用地面积和人口的相对增长关系^[41]。虽然研究的是城市系统的标度律, 但由于早期城市标度律的概念还未普及, 研究者采用了异速增长的概念^[41-42]。国内研究在探索城市系统标度律时也多采用了异速增长的概念^[17-18, 39]。

如果都是研究城市系统表现出的规律, 采用城市标度律还是异速增长律的概念没有实质差异^[43]。但考虑到生物学中异速增长律反映的是个体局部和整体随时间的相对演化关系, 这非常容易让人们将反映城市系统规律的城市标度律引申到单个城市的发展预测中。例如, 城市标度律指出与城市基础设施相关的城市指标与人口规模的标度因子为0.85左右, 人们在解读0.85的含义时, 很容易给出这样的推断: 当一个城市人口规模增加1倍时, 只需要增加85%的基础设施^[7]。然而事实并非如此^[44-47]。

以成都市为例, 2000—2017年该市建成区面积关于常住人口规模的拟合结果如图2所示。结果显示成都市建成区面积关于人口规模的异速增长指数为1.13, 大于1, 说明当城市人口增加一倍时, 建成区面积需要超过一倍的增量, 而不是只需要增加85%。这与城市标度律的理论预期相悖, 按照城市标度律的理论, 建成区面积作为与基础设施相关的城市指标具有规模经济效应, 其关于人口规模的标度因子应该小于1(图1b)。建成区面积关于人口规模的次线性标度关系是已有研究广泛证实的规律^[5, 19, 42]。另一方面, 在单个城市的时序发展中, 已有研究普遍观察到土地扩张快于人口增长, 也即土地城镇化快于人口城镇化^[48-50]。因此, 时序上多数城

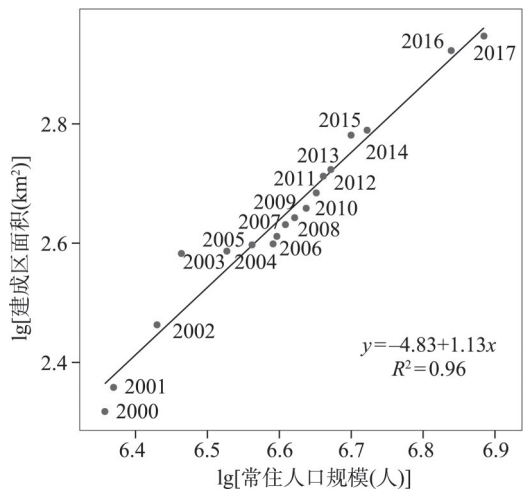


图2 2000—2017年成都建成区面积和常住人口的异速增长律

Fig. 2 Allometric growth of built-up area and population in Chengdu from 2000 to 2017

市的建成区面积与城市人口呈现超线性标度关系(标度因子大于1)^[51-52]。建成区面积和城市人口在截面上和时序上相对增长关系的差异有力地说明了城市标度律和异速增长律的差异^[44-45, 53-54], 不能套用反映城市系统的城市标度律预测单个城市的未来发展^[46]。

4 规模修正指标及应用

4.1 规模修正指标

城市标度律是城市系统表现出的规律, 在城市研究中有何具体应用是研究者关心的问题。传统做法上多采用人均指标衡量城市表现, 例如人均GDP、人均专利数等, 但这忽略了城市指标与人口规模的非线性标度关系。为消除城市人口规模的影响, Bettencourt等提出了规模修正指标(SAMI), 其定义式如下^[25]:

$$SAMI_i = \log Y_i - \log(Y_0 N_i^\beta) = \log(Y_i/Y_0 N_i^\beta) \quad (3)$$

式中: $SAMI_i$ 为消除规模影响的城市 i 的某个指标(如GDP), 其本质是城市指标关于人口规模拟合方程的残差, 表示偏离其预期值的程度; Y_i 为城市 i 的某个指标的真实值; $Y_0 N_i^\beta$ 为城市 i 的某个指标的估计值; N_i 为城市 i 的常住人口规模; Y_0 和 β 为式(2)的拟合参数。

4.2 基于规模修正指标的中国城市排名

根据式(3)可以计算图1中各城市GDP和建成区面积的SAMI值。中国291个地级市2017年人均GDP和GDP规模修正指标的排序如图3a和图3b所示。人均GDP及其规模修正指标(SAMI)的排序均为降序排列, 即排名越靠前, 说明人均GDP越高, SAMI值

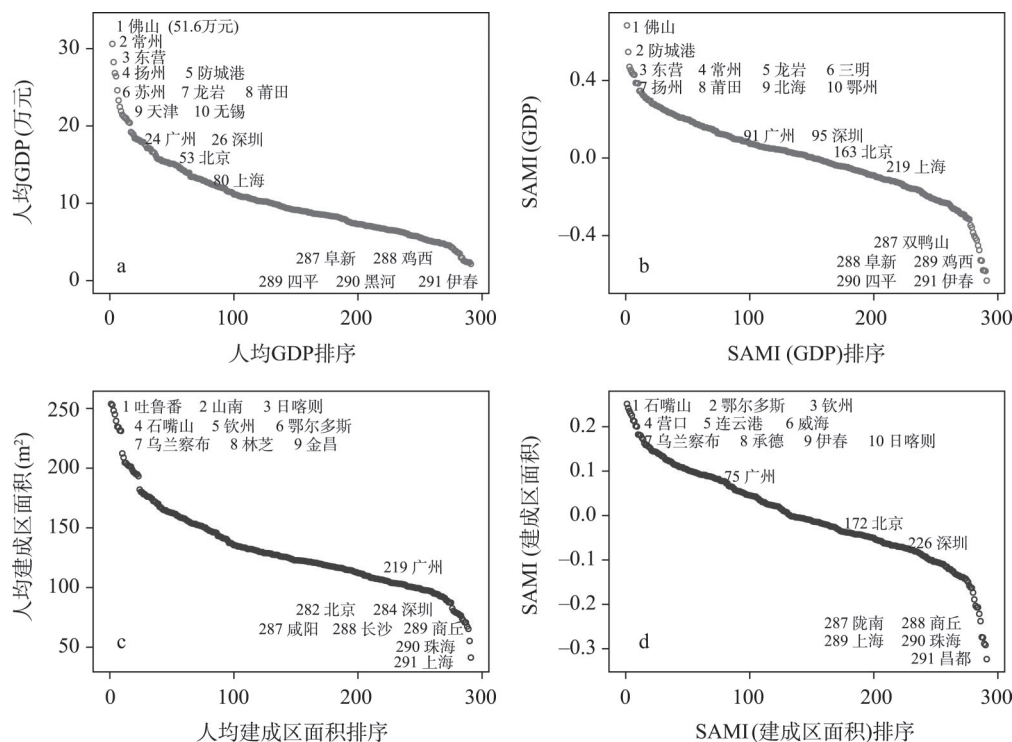


图3 2017年中国291个地级市GDP和建成区面积的人均指标及其规模修正指标排序

Fig. 3 Ranks of per capita indicators and scale-adjusted metropolitan indicators (SAMI) of GDP and built-up area of 291 Chinese prefecture-level cities in 2017

越高,经济表现越好。2017年人均GDP排名前3的城市分别是广东佛山、江苏常州、山东东营,人均GDP最靠后的3个城市是吉林四平、黑龙江黑河、黑龙江伊春(图3a)。如果仅看两种排名的头部和尾部城市,排序的彼此差异并没有体现。图3a和图3b中还标记了4个一线城市的两种排名情况:在人均GDP的排序中,广州、深圳、北京、上海分别位列第24、第26、第53、第80位(图3a);而在考虑城市人口规模后,上述4个城市的排位均被拉低,分别位列第91、第95、第163、第219位(图3b)。图3c和图3d展示了人均建成区面积和建成区面积规模修正指标的排序。与人均建成区面积的排序相比,4个一线城市建成区面积规模修正指标的排序均有前移。

图4展示了人均指标和其规模修正指标(SAMI)排序的对比。图4中直线为1:1指示线,位于该线右下侧的城市,其SAMI值排序比人均指标排序靠前;而位于1:1指示线左上侧的城市,其SAMI值排序比人均指标排序靠后。图4a显示中国较大规模的城市基本都位于1:1指示线左上方,说明大城市的人均GDP排名靠前得益于它们自身的规模优势。这启示我们直接比较人均GDP,对中小城市是不公平的,应该控制城市人口规模后比较不同城市的经济表现。图4b显示较大规模城市基本都位于1:1指示线右下方,说明大城市关于建成区面积的规模经济效应不够理想。

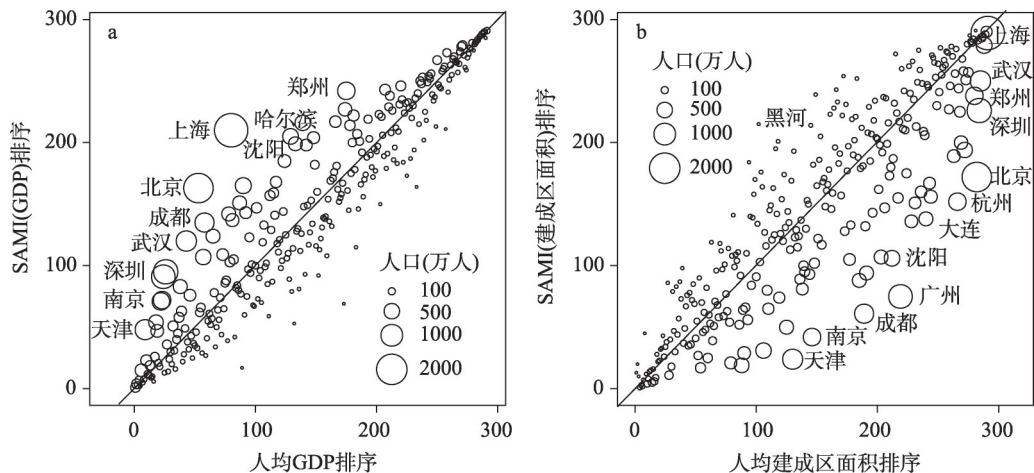


图4 2017年中国291个地级市GDP和建成区面积的人均指标排序和其规模修正指标排序散点图

Fig. 4 Scatter plots of ranks of per capita indicators and scale-adjusted metropolitan indicators (SAMI) of GDP and built-up area of 291 Chinese prefecture-level cities in 2017

图5展示了中国291个地级市2017年GDP和建成区面积规模修正指标(SAMI)的空间分布,二者均具有明显的空间分异规律。GDP规模修正指标为正值的城市主要位于中国东部和南部沿海地区、长江中游和新疆(图5a),这些城市位于图1a中回归直线的上方,说明在同等规模城市中,这些城市的经济产出更多,经济运行更有效率。GDP规模修正指标为负值的城市主要位于东北、中原和西北等内陆地区(图5a),这些城市与同等规模城市相比,经济运行效率相对较低。建成区面积规模修正指标为正值的城市主要位于华东经济发达地区或内蒙古、新疆、西藏等地广人稀地区(图5b),这些城市在同等规模城市中占用了更多的建设用地。建成区面积规模修正指标为负值的城市主要位于华北平原等人口稠密或云贵高原等土地资源有限的地区(图5b),这些城市土地资源紧张,比同等规模城市占用了更少的建设用地。规模修正指标为城市评价研究提供了新视野和新思路。

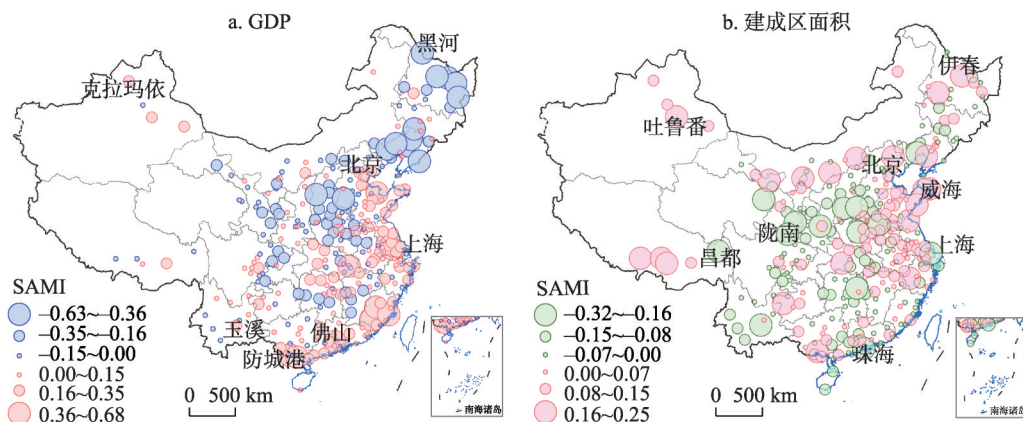


图5 2017年中国291个地级市GDP和建成区面积规模修正指标空间分布

Fig. 5 Spatial distributions of scale-adjusted metropolitan indicators (SAMI) of GDP and built-up area of 291 Chinese prefecture-level cities in 2017

5 结论与讨论

城市标度律是新城市科学的重要内容之一，其反映了城市系统中城市指标与人口规模的缩放关系，包括超线性、次线性和线性3种标度律范式。本文首先总结了城市标度律的研究进展，包括城市标度律的验证、解释、应用和质疑4个方面，在此基础上重点论述了城市标度律和异速增长律的本质差异，介绍并展示了基于城市标度律理论的规模修正指标在城市排序及评价中的应用。主要结论和观点如下：

(1) 城市标度律和异速增长律明显不同。城市标度律是同一时间城市系统表现出来的规律，反映了城市系统在相互作用下协同演化的系统特性。异速增长律是指系统局部和整体（局部）随时间的演化关系，强调城市个体的时序发展规律。城市个体的时序发展是自然地理、社会经济要素和城市系统内相互联系共同作用的结果。虽然城市标度律和异速增长律均为幂函数关系，但二者分别刻画了同一时点城市体系和单个城市时序发展的不同规律。单个城市的时序发展不遵循城市系统表现出的标度律。本文呼吁未来研究中需要区分城市系统标度律和单个城市时序发展的异速增长律。

(2) 规模修正指标在城市排序和评价中具有重要应用。传统基于人均指标的城市排序和评价忽略了城市指标与人口规模的非线性标度关系，例如大城市的人均GDP排名靠前得益于它们自身的规模优势。基于城市标度律理论的规模修正指标（SAMI）消除了城市规模的影响，可以更客观地比较城市表现。实例分析显示中国经济产出效率较高的城市主要位于东南沿海、长江中游和新疆，而东北和中原地区城市的经济产出效率较低。

城市标度律是一个新兴的研究领域，随着复杂性科学、网络科学等交叉学科的发展以及城市大数据的不断涌现，以下研究方向未来值得关注：① 城市标度律的机制解释。城市标度律形成机制是本领域的关键科学问题，目前尚没有形成像生命系统标度律一样的完美解释，这或许正是城市研究者的机会。② 城市系统动态演化模型。城市标度律和异速增长律有着明显区别，但也存在联系^[44-46]。需要发展城市系统动态演化模型，研究城市标度律和单个城市时序发展的内在联系。③ 城市内部标度律。城市本身也是一个复杂系统，城市内部可划分为多个单元，未来可以探索城市内部单元之间是否也存在标度律^[47, 55]。近年来涌现的多源时空大数据为城市内部标度律研究提供了可能^[56]。

致谢：感谢北京化工大学李睿琪副教授和武汉大学徐智邦、雷玮倩博士对本文提出的宝贵意见。

参考文献(References)

- [1] Berry B J L. Cities as systems within systems of cities. *Papers of the Regional Science Association*, 1964, 13(1): 146-163.
- [2] Batty M. Building a science of cities. *Cities*, 2012, 29: S9-S16.
- [3] Batty M. *The New Science of Cities*. Cambridge, MA: The MIT Press, 2013.
- [4] Meirelles J, Neto C R, Ferreira F F, et al. Evolution of urban scaling: Evidence from Brazil. *PLOS ONE*, 2018, 13(10): e0204574. DOI: 10.1371/journal.pone.0204574.
- [5] Bettencourt L M A. The origins of scaling in cities. *Science*, 2013, 340(6139): 1438-1441.
- [6] Bettencourt L M A, Lobo J, Helbing D, et al. Growth, innovation, scaling, and the pace of life in cities. *PNAS*, 2007, 104(17): 7301-7306.
- [7] Bettencourt L, West G. A unified theory of urban living. *Nature*, 2010, 467(7318): 912.
- [8] Cottineau C, West G. *Scale: The Universal Laws of Growth, Innovation, Sustainability, and the Pace of Life in Organisms, Cities, Economies, and Companies*. New York: Penguin Press, 2017.
- [9] Kleiber M. Body size and metabolic rate. *Physiological Reviews*, 1947, 27(4): 511-541.
- [10] Bettencourt L M A, Lobo J. Urban scaling in Europe. *Journal of the Royal Society Interface*, 2016, 13(116): 20160005.
- [11] Van Raan A F J, Van Der Meulen G, Goedhart W. Urban scaling of cities in the Netherlands. *PLOS ONE*, 2016, 11(1): e146775. DOI: 10.1371/journal.pone.0146775.
- [12] Sahasranaman A, Bettencourt L M A. Urban geography and scaling of contemporary Indian cities. *Journal of the Royal Society Interface*, 2019, 16(152): 20180758. DOI: 10.1098/rsif.2018.0758.
- [13] Zünd D, Bettencourt L M A. Growth and urban development in prefecture-level China. *SSRN Electronic Journal*, 2018. DOI: 10.2139/ssrn.3302756.
- [14] Cesaretti R, Lobo J, Bettencourt L M A, et al. Population-area relationship for Medieval European cities. *PLOS ONE*, 2016, 11(10): e162678. DOI: 10.1371/journal.pone.0162678.
- [15] Ortman S G, Cabaniss A H, Sturm J O, et al. Settlement scaling and increasing returns in an ancient society. *Science Advances*, 2015, 1(1): e1400066. DOI: 10.1126/sciadv.1400066.
- [16] Ortman S G, Cabaniss A H, Sturm J O, et al. The pre-history of urban scaling. *PLOS ONE*, 2014, 9(2): e87902. DOI: 10.1371/journal.pone.0087902.
- [17] Li Xun, Chen Gangqiang, Xu Xueqiang. Urban allometric growth in China: Theory and facts. *Acta Geographica Sinica*, 2009, 64(4): 399-407. [李郇, 陈刚强, 许学强. 中国城市异速增长分析. *地理学报*, 2009, 64(4): 399-407.]
- [18] Dong Lei, Wang Hao, Zhao Hongrui. The definition of city boundary and scaling law. *Acta Geographica Sinica*, 2017, 72(2): 213-223. [董磊, 王浩, 赵红蕊. 城市范围界定与标度律. *地理学报*, 2017, 72(2): 213-223.]
- [19] Jiao Limin, Lei Weiqian, Xu Gang, et al. Urban scaling and the spatio-temporal characteristics of scaling exponents in China. *Acta Geographica Sinica*, 2020, 75(12): 2744-2758. [焦利民, 雷玮倩, 许刚, 等. 中国城市标度律及标度因子时空特征. *地理学报*, 2020, 75(12): 2744-2758.]
- [20] Liu X C, Zou Z H. Analysis on urban scaling characteristics of China's relatively developed cities. *PLOS ONE*, 2020, 15(7): e236593. DOI: 10.1371/journal.pone.0236593.
- [21] Li R, Lu L Y, Gu W W, et al. Assessing the attraction of cities on venture capital from a scaling law perspective. *arXiv*: 2011.06287v1, 2020.
- [22] Li R Q, Dong L, Zhang J, et al. Simple spatial scaling rules behind complex cities. *Nature Communications*, 2017, 8(1): 1841.
- [23] Zhang J, Li X, Wang X, et al. Scaling behaviours in the growth of networked systems and their geometric origins. *Scientific Reports*, 2015, 5: 9767. DOI: 10.1038/srep09767.
- [24] Ribeiro F L, Meirelles J, Ferreira F F, et al. A model of urban scaling laws based on distance dependent interactions. *Royal Society Open Science*, 2017, 4(3): 160926. DOI: 10.1098/rsos.160926.
- [25] Bettencourt L M A, Lobo J, Strumsky D, et al. Urban scaling and its deviations: Revealing the structure of wealth, innovation and crime across cities. *PLOS ONE*, 2010, 5(11): e13541. DOI: 10.1371/journal.pone.0013541.
- [26] Alves L G A, Mendes R S, Lenzi E K, et al. Scale-adjusted metrics for predicting the evolution of urban indicators and quantifying the performance of cities. *PLOS ONE*, 2015, 10(9): e134862. DOI: 10.1371/journal.pone.0134862.
- [27] Ribeiro H V, Hanley Q S, Lewis D. Unveiling relationships between crime and property in England and Wales via density scale-adjusted metrics and network tools. *PLOS ONE*, 2018, 13(2): e192931. DOI: 10.1371/journal.pone.0192931.
- [28] Alves L G, Ribeiro H V, Lenzi E K, et al. Distance to the scaling law: A useful approach for unveiling relationships

- between crime and urban metrics. *PLOS ONE*, 2013, 8(8): e69580. DOI: 10.1371/journal.pone.0069580.
- [29] Lobo J, Bettencourt L M A, Strumsky D, et al. Urban scaling and the production function for cities. *PLOS ONE*, 2013, 8(3): e58407. DOI: 10.1371/journal.pone.0058407.
- [30] Jiao L M, Xu Z B, Xu G, et al. Assessment of urban land use efficiency in China: A perspective of scaling law. *Habitat International*, 2020, 99: 102172. DOI: 10.1016/j.habitatint.2020.102172.
- [31] Cottineau C, Hatna E, Arcaute E, et al. Diverse cities or the systematic paradox of Urban Scaling Laws. *Computers Environment and Urban Systems*, 2017, 63: 80-94.
- [32] Arcaute E, Hatna E, Ferguson P, et al. Constructing cities, deconstructing scaling laws. *Journal of The Royal Society Interface*, 2015, 12(102): 20140745. DOI: 10.1098/rsif.2014.0745.
- [33] Gudipudi R, Rybski D, Lüdeke M K B, et al. The efficient, the intensive, and the productive: Insights from urban Kaya scaling. *Applied Energy*, 2019, 236: 155-162.
- [34] Leitão J C, Miotto J M, Gerlach M, et al. Is this scaling nonlinear? *Royal Society Open Science*, 2016, 3(7): 150649. DOI: 10.1098/rsos.150649.
- [35] Barthelemy M. Tomography of scaling. *Journal of The Royal Society Interface*, 2019, 16(160): 20190602. DOI: 10.1098/rsif.2019.0602.
- [36] Muller N Z, Jha A. Does environmental policy affect scaling laws between population and pollution? Evidence from American metropolitan areas. *PLOS ONE*, 2017, 12(8): e181407. DOI: 10.1371/journal.pone.0181407.
- [37] Strano E, Sood V. Rich and poor cities in Europe: An urban scaling approach to mapping the European economic transition. *PLOS ONE*, 2016, 11(8): e159465. DOI: 10.1371/journal.pone.0159465.
- [38] Xu G, Jiao L M, Yuan M, et al. How does urban population density decline over time? An exponential model for Chinese cities with international comparisons. *Landscape and Urban Planning*, 2019, 183: 59-67.
- [39] Chen Yanguang. The rise, fall, and revival process of allometric scaling analysis in urban studies. *Geographical Research*, 2013, 32(6): 1033-1045. [陈彦光. 城市异速标度研究的起源、困境和复兴. *地理研究*, 2013, 32(6): 1033-1045.]
- [40] Shingleton A W. Allometry: The study of biological scaling. [2019-07-17]. <https://www.nature.com/scitable/knowledge/library/allometry-the-study-of-biological-scaling-13228439>.
- [41] Nordbeck S. Urban allometric growth. *Geografiska Annaler: Series B, Human Geography*, 1971, 53(1): 54-67.
- [42] Lee Y. An allometric analysis of the US urban system: 1960-80. *Environment and Planning A*, 1989, 21(4): 463-476.
- [43] Lang W, Long Y, Chen T T, et al. Reinvestigating China's urbanization through the lens of allometric scaling. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2019, 525: 1429-1439.
- [44] Bettencourt L M A, Yang V C, Lobo J, et al. The interpretation of urban scaling analysis in time. *Journal of the Royal Society Interface*, 2020, 17(163): 20190846. DOI: 10.1098/rsif.2019.0846.
- [45] Ribeiro F L, Meirelles J, Netto V M, et al. On the relation between transversal and longitudinal scaling in cities. *PLOS ONE*, 2020, 15(5): e233003. DOI: 10.1371/journal.pone.0233003.
- [46] Xu G, Zhou Z Z, Jiao L M, et al. Cross-sectional urban scaling fails in predicting temporal growth of cities. *arXiv: 1910.06732*, 2019.
- [47] Xu G, Xu Z B, Gu Y Y, et al. Scaling laws in intra-urban systems and over time at the district level in Shanghai, China. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2020, 560: 125162. DOI: 10.1016/j.physa.2020.125162.
- [48] Li Zilian. A study on the causes of population urbanization lagging behind land urbanization. *China Population, Resources and Environment*, 2013, 23(11): 94-101. [李子联. 人口城镇化滞后于土地城镇化之谜: 来自中国省际面板数据的解释. *中国人口·资源与环境*, 2013, 23(11): 94-101.]
- [49] Zhang Qingyong, Liu Xiaoyao. Urbanization of land vs urban population growth: The research progress and perspective. *Regional Economic Review*, 2017(3): 134-143. [张清勇, 刘逍遥. 土地城镇化 VS 人口城镇化: 研究现状与展望. *区域经济评论*, 2017(3): 134-143.]
- [50] Zhao Rui, Jiao Limin, Xu Gang, et al. The relationship between urban spatial growth and population density change. *Acta Geographica Sinica*, 2020, 75(4): 695-707. [赵睿, 焦利民, 许刚, 等. 城市空间增长与人口密度变化之间的关联关系. *地理学报*, 2020, 75(4): 695-707.]
- [51] Liang Jinshe, Wang Min. The allometric growth of urban land use and population and its experiential research. *Scientia Geographica Sinica*, 2002, 22(6): 649-654. [梁进社, 王旻. 城市用地与人口的异速增长和相关经验研究. *地理科学*, 2002, 22(6): 649-654.]
- [52] Marshall J D. Urban land area and population growth: A new scaling relationship for metropolitan expansion. *Urban Studies*, 2007, 44(10): 1889-1904.
- [53] Keuschnigg M. Scaling trajectories of cities. *PNAS*, 2019, 116(28): 13759-13761.
- [54] Depersin J, Barthelemy M. From global scaling to the dynamics of individual cities. *PNAS*, 2018, 115(10): 2317-2322.

- [55] Dong L, Huang Z, Zhang J, et al. Understanding the mesoscopic scaling patterns within cities. *Scientific Reports*, 2020, 10: 21201.
- [56] Jiao Limin, Li Zehui, Xu Gang, et al. The characteristics and patterns of spatially aggregated elements in urban areas of Wuhan. *Acta Geographica Sinica*, 2017, 72(8): 1432-1443. [焦利民, 李泽慧, 许刚, 等. 武汉市城市空间集聚要素的分布特征与模式. *地理学报*, 2017, 72(8): 1432-1443.]

Urban scaling law and its application

GONG Jianya¹, XU Gang¹, JIAO Limin², QIN Kun¹

(1. School of Remote Sensing and Information Engineering, Wuhan University, Wuhan 430079, China;
2. School of Resource and Environmental Sciences, Wuhan University, Wuhan 430079, China)

Abstract: The introduction of complexity science in urban geography has provided a new perspective to understand cities. Urban scaling law is one of the simple rules behind complex urban systems, which describes how urban indicators scale with urban population size within the system of cities. Social interaction-related urban indicators, such as GDP and innovation, super-linearly scale with urban population in a power law form, while infrastructure-related urban indicators, such as roads and gas stations, sub-linearly scale with population. Other urban indicators linearly scale with population, which are related to human individual needs, such as jobs and household electricity consumption. In this study, we first summarize the content and progress of urban scaling law during the past decade (2007-2020) from the following four aspects: the validation of urban scaling law, the explanation on the mechanism of urban scaling law, the application of urban scaling law, and the criticism of urban scaling law. We further compare the fundamental differences between the urban scaling law and urban allometric growth. Urban scaling law describes quantitative relationships between urban indicators and population size across cities, while urban allometric growth emphasizes the temporal growth of individual cities. Our analysis indicates that the cross-sectional urban scaling law cannot be applied to predict temporal trajectories of individual cities. Finally, we introduce the scale-adjusted metropolitan indicator (SAMI) for the evaluation of economic performance and urban land use efficiency in 291 Chinese cities, which is based on the theory of urban scaling law. The conventional evaluation of cities based on per capita indicators ignores the non-linear scaling relationship between urban indicators and population size. For example, the GDP per capita of large cities ranks high thanks to their advantages of population size. SAMI eliminates the influence of city size and can compare urban performance more objectively. Cities with higher SAMIs of GDP experience a higher efficiency in economic output (GDP) and they are concentrated in southeast coastal regions, middle reaches of the Yangtze River, and Xinjiang. On the contrary, cities in the northeastern China and Central China Plains experience a relatively low efficiency in economic output. Future studies are encouraged to focus on the mechanism of urban scaling law, the unified model for the evolving urban system across cities and over time, and the scaling law within cities.

Keywords: urban geography; science of cities; complex urban system; scaling law; scale-adjusted metropolitan indicator (SAMI)