第46卷 第2期 地 理 学 报 Vol. 46, No. 2
1991 年 6 月 ACTA GEOGRAPHICA SINICA June, 1991

最小水流能量损失率理论在河相关系中的应用*

黄克中 钟恩清
(中山大学地理系,广州)

提要 本文介绍最小水流能量损失率理论的变分法基础。用该理论导出了航道整治工程前后的河相关系式，并将之用于预估东平水道航道整治工程后的河相。实测值与预估值的比较表明,该理论和该河相关系式是可信的。

关键词 最小单位水流功率 河相关系 航道整治 整治水深

一、前 言

为了满足日益发展的内河航运的需要,对冲积河流中具有浅滩的航道必须加以整治。整治工程常用的方法是修建一系列的丁坝来束窄河槽,加大流速,使浅滩受到冲刷，以达到设计要求的水深。但是，在工程设计中如何预估整治工程后河槽达到相对稳定时的河相关系,这是个重要问题。传统的河流动力学告诉我们,由于水、沙二相流动和水流与河槽相互作用的复杂性,通常使用的力学方法和经验公式遇到了很大的困难,用不同的方法和公式计算的结果往往差异很大。为此，Yang 和 Song 等人近十多年来提出用最小水流能量损失率理论来预估冲积河流的演变,取得了许多满意的成果[1-4]。我们认为,应对该理论予以足够重视。为了推动对该理论的研究和应用，本文首先着重从条件上阐明它可以通过变分方法得到,然后用它导出航道整治工程前后的河相关系式,并将之用于珠江流域东平水道航道整治工程后的水深预估。

二、变分理论基础

水流运动要消耗水流能量。冲积河流中的水流都挟带着泥沙，如果从能量的观点来研究河相关系，就牵涉到是否必须考虑泥沙运动对水流能量的影响问题。根据以往的研究认为,推移质泥沙运动必然要消耗水流的一部分能量;而悬移质泥沙运动却由于悬移质的存在使水流中的紊动强度减弱,紊动能量便随之减小,因此，有悬移质存在的水流能量损失反而比同样条件下的清水水流的能量损失要小[5]。综合上述两方面的效应，当河流的输沙量不大时,为了简化,现忽略水流中的泥沙运动对水流能量的影响，而仅从反映清

* 本文是广东省航道建设工程指挥部委托我们进行研究部分成果,作者对该单位的信任和支持表示感谢。
来稿日期: 1989 年 7 月。

水紊流运动的雷诺（Reynolds）方程组出发，利用变分方法证明最小水流能量损失率理论的成立。

雷诺运动方程式可表为[6]

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)=-\frac{\partial(\gamma H)}{\partial x_i}+\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j},\ i,j=1,2,3 \tag{1}$$

式中：x_i 为直角坐标；t 为时间；u_i 为时均速度；ρ 为水的密度；γ 为水的重度；H 为势能水头；σ_{ij} 为雷诺应力张量。布辛纳斯克（Boussinesq）假设 σ_{ij} 有如下表达式：

$$\sigma_{ij}=\rho(\nu+\lambda)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{2}$$

其中：ν 为水的运动粘性系数；λ 为涡动粘性系数。

连续方程为

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0 \tag{3}$$

当水流为恒定渐变流，且佛汝德（Froude）数不大时，则式(1)中的加速度项可以忽略，于是运动方程式(1)简化为

$$\frac{\partial(\gamma H)}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\rho(\nu+\lambda)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right] \tag{4}$$

单位体积能量损失率或能量损失函数为[7]

$$\Phi(u_i)=\frac{1}{2}\rho(\nu+\lambda)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2 \tag{5}$$

以式(2)代入上式，也可表为

$$\phi(u_i)=\frac{1}{2}\sigma_{ij}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{6}$$

就未知函数 $u_i(x_1,x_2,x_3)$ 而言，当 u_i 在边界上给定，其泛函为[8]

$$I(u_i)=\iiint\limits_{\Omega}F(x_i,u_i,u_{i,j})d\Omega \tag{7}$$

式中：Ω 为所研究的流场的整个体积；$u_{i,j}=\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$；$F$ 是函数，可取为[4]

$$F=\Phi+u_i\frac{\partial(\gamma H)}{\partial x_i} \tag{8}$$

将式(8)代入式(7)，有

$$I(u_i)=\iiint\limits_{\Omega}\Phi d\Omega+\iiint\limits_{\Omega}u_i\frac{\partial(\gamma H)}{\partial x_i}d\Omega=E+E_s \tag{9}$$

式中：

$$E=\iiint\limits_{\Omega}\Phi d\Omega \tag{10}$$

为整个流场的水流能量损失率；E_s 代表另一项积分。注意到式(3)和利用奥斯特罗格拉特斯基（Остроградский）公式，E_s 可变为

$$E_s = \iiint_{\Omega} \frac{\partial(u_i \gamma H)}{\partial x_i} d\Omega = \iint_{s} \gamma H(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}) ds \tag{11}$$

其中：s 为整个流场边界面的面积；$\boldsymbol{u}$ 为时均速度矢量；$\boldsymbol{n}$ 为边界面上面积元的外法向单位矢量。显然，在水面上和河槽边界面上有 $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = 0$，$E_s$ 只在上、下游的过水边界断面上有值，故有

$$E_s = rQ(H_2 - H_1) \tag{12}$$

其中：Q 为总流量；H_2 和 H_1 分别为上、下游过水断面处水流具有的平均单位势能。由上式可知 E_s 为恒量。

因为 E_s 为恒量，由式(9)知，$E(u_i)$ 是一个泛函，而且泛函 E 和泛函 I 取极值的必要条件是完全相同的。根据变分法[8]，泛函 I 取极值的必要条件为函数 F 满足欧拉（Euler）和奥斯特罗格拉特斯基方程：

$$\frac{\partial F}{\partial u_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial F}{\partial u_{i,j}} = 0 \tag{13}$$

边界条件为在河槽边界和在上、下游过水边界断面的 u_i 值都是指定值；但在水面具有自然边界条件性质，必须定出它的自然边界条件。

假设给 u_i 一个变化 $\varepsilon_i \eta_i(x_j)$，其中 ε_i 为数值很小的参数；η_i 为 x_j 的一个任意函数，它在河槽边界和上、下游过水边界断面上为零。泛函 I 的一次变分 δI 等于泛函 E 的一次变分 δE，故由式(7)有

$$\begin{aligned} \delta E &= \varepsilon_i \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial F}{\partial u_i} \eta_i + \frac{\partial F}{\partial u_{i,j}} \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} \right) d\Omega \\ &= \varepsilon_i \iiint_{\Omega} \eta_i \left(\frac{\partial F}{\partial u_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial F}{\partial u_{i,j}} \right) d\Omega + \varepsilon_i \iiint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\eta_i \frac{\partial F}{\partial u_{i,j}} \right) d\Omega \\ &= \varepsilon_i \iiint_{\Omega} \eta_i \left(\frac{\partial F}{\partial u_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial F}{\partial u_{i,j}} \right) d\Omega + \varepsilon_i \iint_{s} \eta_i \frac{\partial F}{\partial u_{i,j}} n_j ds \end{aligned} \tag{14}$$

式中：n_j 为 $\boldsymbol{n}$ 在 j 方向上的分量。因为 δE 等于零，而 η_i 在 Ω 之内是任意的，只有当式(13)得到满足，才能获得 E 的稳定值，故上式右边的第一项积分为零；对第二项积分讲，由于在河槽边界和在上、下游过水边界断面的 η_i 均为零，在水面上的 η_i 不为零，故得水面的自然边界条件为

$$\left. \frac{\partial F}{\partial u_{i,j}} \right|_{sur} = 0 \tag{15}$$

其中：下标 sur 表示水面。

由式(8)可以求得

$$\frac{\partial F}{\partial u_i} = \frac{\partial(\gamma H)}{\partial x_i} \tag{16}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_{i,j}} = \rho(\nu + \lambda) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \sigma_{ij} \tag{17}$$

可以认为在水面上的 σ_{ij} 为零，故式(15)得到满足。

将式(16)和(17)代入式(13)，得到运动方程式(4)，这就证明了在前述的边界条

件和自然边界条件下，通过对泛函 E 取极值来求解问题与求解运动方程式是等价的。如果取另一速度 $(u_i+\hat{u}_i)$，其中 $\hat{u}_i$ 为 u_i 的任意增量，$(u_i+\hat{u}_i)$ 满足连续方程式(3)，但不满足运动方程式(4)，可以证明有[3]

$$\mathrm{E}(u_i)=\mathrm{E}(u_i+\hat{u}_i)-\mathrm{E}(\hat{u}_i)\leqslant \mathrm{E}(u_i+\hat{u}_i) \tag{18}$$

因为E值通过式(10)和(5)指定为正，故由式(18)知道，满足运动方程式(4)的 $E(u_i)$ 值是小于不满足式(4)的 $E(u_i+\hat{u}_i)$ 值的。由此可见，上述的等价性结论应进一步理解为：通过对泛函 E 取极小值(或称最小值)来求解问题与求解运动方程式是等价的。

以下给出 E 的另一些表达式：以式(6)代入式(10)，用分部积分有

$$E=\iiint_{\Omega}\frac{1}{2}\sigma_{ij}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)dx_1dx_2dx_3$$

$$=\iint_{s}[\sigma_{ij}u_i]_{x_{j1}}^{x_{j2}}\frac{dx_1dx_2dx_3}{dx_j}-\iiint_{\Omega}u_i\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}d\Omega \tag{19}$$

式中：x_{j1} 和 x_{j2} 是边界上的一些坐标点，在这些点上可能是 u_i 为零或 σ_{ij} 为零，二者必具其一，故上式中的面积分项为零。继以式(2)和(4)代入最后的体积分项得

$$E=-\iiint_{\Omega}u_i\frac{\partial(\gamma H)}{\partial x_i}d\Omega=\iiint_{\Omega}\gamma u_iJ_id\Omega \tag{20}$$

式中：$J_i=-\dfrac{\partial H}{\partial x_i}$ 为 x_i 方向上的水面坡降。

对纵向的一维 (x) 问题，式(20)变为

$$E=\iiint_{\Omega}\gamma VJd\Omega=\int_{l}\gamma QJdx \tag{21}$$

式中：V 为断面平均速度；l 为所研究的河段长度。

也可以定义一个纵向的一维平均水流功率

$$P=\frac{E}{\gamma Q}=\frac{\iiint_{\Omega}\gamma VJd\Omega}{\gamma Q} \tag{22}$$

如果 J 沿 x 近似保持不变，分别由式(21)和(22)有

$$E=\gamma lQJ \tag{23}$$

和

$$P=VJ \tag{24}$$

(VJ) 称为单位水流功率，即单位重量的水在单位时间内损失的能量。

由于 E 是泛函，故 P 也是泛函，所以通过对泛函 E 取极小值来求解问题的提法与通过对泛函 P 取极小值来求解问题的做法也是等价的。

综上论证，可得最小能量损失率(或最小单位水流功率)理论内容如下：当水流为恒定渐变流，佛汝德数和输沙量都不大时，在河流的演变过程中，总是朝着能量损失率(或单位水流功率)为最小的要求来调整它的速度和水面坡降以及与之相关的水深、河宽和糙率，当达到最小能量损失率(或最小单位水流功率)时，河流便处于相对稳定(准平衡)状态。

根据上述理论，对纵向的一维问题，河流处于相对稳定时有数学表示式：

$$VJ = \text{最小值} \tag{25}$$

式中的（VJ）也可以通过流量式

$$Q = BhV \tag{26}$$

和满宁（Manning）公式

$$V = \frac{1}{n} h^{2/3} J^{1/2} \tag{27}$$

进行任意组合。上两式中：B 为水面宽；h 为平均水深；n 为糙率。

三、整治工程前后的河相关系及其应用

在航道整治工程之前，可以认为，河流经过长期的调整，已达到了相对稳定，单位水流功率已达到最小值。由于在某些河段修建了整治建筑物(例如丁坝、顺坝、护岸等)，破坏了原有的稳定，单位水流功率增大。因为丁坝等建筑物对河段施加了硬性约束，即使河段经过长期调整，也不能回复原有的河相关系。然而，对同一河段讲，可以假定，经过长期的调整，该河段回到相对平衡时的最小单位水流功率是与整治前的最小单位水流功率保持相等的，即

$$(V_1 J_1)_{\min} = (V_2 J_2)_{\min} \tag{28}$$

式中：下标 1 和 2 分别代表整治前和整治后已达相对稳定的情形；min 表示取最小值。

将式(26)和(27)代入式(28)，由于整治后的河床一般不会有明显的河床粗化现象，故一般可以假定 $n_1 = n_2$，便得整治前后的河相关系式

$$\frac{h_2}{h_1} = \left(\frac{B_1}{B_2} \frac{Q_2}{Q_1}\right)^{9/13} \tag{29}$$

东平水道是珠江水系中的一条经济价值较高的航道，但由于有若干浅滩，未能达到三级航道的航深标准。为了促进珠江流域的经济发展，1983 年冬开始了全面的整治工程。整治方法主要是在浅滩河段内修建丁坝群，以约束水流，加大流速达到冲深河床的目的。与此同时，在三个支汊内修建锁坝，令枯水期的水流集中在主汊航道，使航深加大。全部工程已于 1988 年春基本完成。东平水道的水、沙情况是近似符合最小能量损失率理论的条件的，可用式(29)预估整治后相对稳定的 h_2。

结合采用丁坝和堵塞支汊的整治方法，再对式(29)中的各个符号说明如下：Q_1 采用整治流量(东平水道用第二造床流量为整治流量)，与整治流量相应的整治前河段各处的水位均称为整治水位。Q_2 为整治后河床达到相对稳定时在整治水位下的流量。应该注意，只有当河段不存在支汊和丁坝坝头顶部高程等于或高于整治水位时，才可能有 $Q_2 = Q_1$。如果存在支汊，但已修建锁坝或在支汊入口修建了顺坝或挑流丁坝，则有 $Q_2 > Q_1$。此外，当不存在支汊，但是如果丁坝坝头顶部高程低于整治水位，一部分流量将在坝田通过，使整治线宽度内的流量减小，故有 $Q_2 < Q_1$。当然也可能同时存在上述两种情况，此时 Q_2 可能大于也可能小于 Q_1。以上三种情况下的 Q_2 都可以用普通水力学方法算得。h_1 为整治前整治水位下的平均水深。h_2 为整治后河床达到相对稳定时在整治水位下的平均水深。B_1 为整治前整治水位下的水面宽。B_2 为整治线宽度。由于水流绕过丁

坝坝头后出现一定程度的扩散，在两个丁坝之间，有效的过水水面宽度实际上要比 B_2 大一些，故应将式(29)中的 B_2 改以 αB_2 代替，其中 α 是系数，按经验一般可取 1.03～1.05。

当用式(29)求得 h_2，设计水位下的航深为

$$d = \beta h_2 - (Z_g - Z_d) \tag{30}$$

式中：β 为水深改正系数，根据现有经验[9]，$\beta = 1.11 \sim 1.18$；该值也可以根据不同河流的具体情况适当调整；Z_g 为整治水位；Z_d 为设计水位(即多年平均枯水位)。

下面对东平水道中两个有代表性的浅段进行计算，给出整治后航深的估算结果，同时也给出最近的实测值以资比较。

1. 紫洞口至榕洲河段

本河段位于东平水道中段，全长约 6.6 km。河段内共有四个浅滩，共长约 3.8 km。整治方法是修建丁坝系列。工程于 1984 年开工，至 1986 年春竣工。采用 1983 年 10 月测量的河道地形图代表整治前的河相。在该河段中共取十三个断面进行计算。整治流量为 900 m³/s，整治线宽度为 160 m，取 $\alpha = 1.05$，$\beta = 1.11$。计算结果见表 1。

表 1　紫洞口至榕洲河段的计算结果

Tab. 1　Results of the calculating of the river section from Zidongkou to Rongzhou

断面号	间距 (m)	Z_g (m)	B_1 (m)	h_1 (m)	h_2 (m)	Z_d (m)	d(m) 实测值		d(m) 计算值
							83 年 10 月	87 年 12 月	
1		2.60	336	3.83	6.14	−0.49	1.2	3.5	3.73
2	690	2.54	252	4.56	5.99	−0.51	1.6	3.5	3.60
3	720	2.48	228	5.01	6.14	−0.53	3.0	3.6	3.81
4	820	2.41	303	4.03	6.01	−0.55	3.0	3.6	3.72
5	620	2.36	282	4.11	5.83	−0.57	2.7	3.3	3.55
6	480	2.32	259	4.45	5.96	−0.59	2.3	3.6	3.71
7	420	2.28	278	4.46	6.27	−0.61	2.6	3.8	4.08
8	460	2.24	417	3.11	5.79	−0.63	3.0	3.4	3.56
9	310	2.21	379	3.43	5.98	−0.64	2.3	3.6	3.79
10	290	2.19	345	3.73	6.09	−0.65	2.3	3.8	3.92
11	640	2.14	269	4.34	5.96	−0.67	2.7	3.7	3.81
12	480	2.10	355	3.32	5.53	−0.69	2.3	3.0	3.35
13	690	2.04	310	3.91	5.93	−0.71	1.5	3.7	3.84

从表 1 看到，设计水位下的航深略大于 1987 年 12 月的实测值。

2. 东沙洲至马沙河段

本河段位于东平水道上段，全长约 6.5 km，河段内有支汊，在主汊航道内共有三个浅滩，共长约 3 km。整治方法是在主汊修建丁坝系列，同时用锁坝堵塞支汊。工程于 1985 年开工，至 1988 年春竣工。采用 1983 年 10 月测量的河道地形图代表整治前的河相，在该河段中共取十六个断面进行计算。整治流量为 2 860 m³/s，整治线宽度为 400 m，取 $\alpha = 1.05$，$\beta = 1.11$。计算结果见表 2。

从表 2 看到，设计水位下的航深略大于 1988 年 10 月的实测值。

表 2 东沙洲至马沙河段的计算结果

Tab. 2 Results of the calculating of the river section from Dongshazhou to masha

断面号	间距 (m)	Z_g (m)	B_1 (m)	h_1 (m)	h_2 (m)	Z_d (m)	d(m) 实测值		d(m) 计算值
							83 年 10 月	88 年 10 月	
1		3.96	780	4.14	6.35	−0.25	2.6	2.7	2.85
2	435	3.93	616	4.82	6.44	−0.26	2.5	2.8	2.97
3	455	3.90	637	4.88	6.67	−0.27	2.6	3.0	3.24
4	415	3.87	641	4.91	6.74	−0.27	2.3	3.1	3.35
5	300	3.85	682	4.54	6.51	−0.28	2.1	3.0	3.10
6	400	3.82	747	3.80	6.33	−0.29	2.1	2.7	2.92
7	360	3.80	750	3.78	6.32	−0.30	2.8	2.8	2.92
8	390	3.77	676	4.04	6.29	−0.31	2.8	2.7	2.91
9	460	3.73	520	4.95	6.42	−0.31	1.0	2.8	3.10
10	440	3.70	525	4.86	6.35	−0.32	1.8	2.8	3.04
11	515	3.66	704	4.43	6.33	−0.32	1.6	2.6	3.05
12	470	3.63	654	4.70	6.39	−0.33	2.5	3.0	3.07
13	400	3.60	736	4.42	6.52	−0.34	3.1	3.2	3.30
14	460	3.56	683	4.45	6.23	−0.34	2.8	2.8	3.02
15	500	3.52	716	4.31	6.24	−0.35	1.8	2.9	3.06
16	440	3.49	687	4.59	6.49	−0.36	2.0	3.2	3.36

由上述两个河段的计算结果看到，工程后河槽达到相对稳定时设计水位下航深的估算值均略大于工程后的实测值。这可能是由于实测的时间距离工程竣工的时间仍不长，河槽尚未达到相对稳定，也可能是由于本河段实际的 β 值比已有的经验值要小一点。但是,我们认为，上述估算的结果还是比较合理的和比较可信的;当然,上述估计是否正确，尚有待于今后对河槽的观察。

四、结 语

预估冲积河流的河相关系是一个尚未得到满意解决的困难问题。最小能量损失率理论的提出,给河床演变学带来了新的前景。本文介绍了该理论的变分基础,并将该理论应用到建立航道整治工程前后的河相关系。通过对东平水道整治后的航深进行估算的实例,说明了该理论和该河相关系式是可信的。建议国内同行对该理论及其应用作进一步的研究。

参 考 文 献

[1] Yang, C. T., Potential Energy and Stream Morphology, *Water Resources Research*, **7** (2), 1971, 312.

[2] Yang,C. T. Minimum Unit Stream Power and Fluvial Hydraulics,*J. of the Hydraulics Division*, ASCE, **102** (HY7), 1976, 122.

[3] Yang, C. T. and Song. C. S., Theory of Minimum Rate of Energy Dissipation, *J. of the Hydraulics Division*, ASCE, **105** (HY7), 1979, 769.

[4] Song, C. S. and Yang, C. T., Minimum Stream Power:Theory, *J. of the Hydraulics Division*,

ASCE, 106(HY9), 1980, 1477.
[5] 河流泥沙工程学，武汉水利电力学院河流泥沙工程学教研室编著，水利电力出版社，1981。
[6] Hinze, J. O., Turbulence, McGraw-Hill BooK Co., New York, 1959.
[7] Lamb, H., Hydrodynamics, Dover Pub., 1932.
[8] 变分学教程，拉弗林契叶夫等著，曾鼎钚等译，高等教育出版社，1955。
[9] 平原航道整治，广东省航道局等编，人民交通出版社，1977。

*　　*　　*　　*

作者简介　黄克中，男，1932年4月生，教授。1953年毕业于华南工学院水利工程专业。现从事水资源与环境科学的研究，有«随机方法与模糊数学应用»和"论水质的风险分析"等多篇著作。

APPLICATION OF THE THEORY OF MINIMUM RATE OF ENERGY DISSIPATION TO HYDRAULIC GEOMETRY RELATIONSHIP

Huang Kezhong　and　Zhong Enqing

(Department of Geography, Zhongshan University, Guangzhou)

Key words　Minimum unit rate stream power, Relationship of hydraulic geometry, River regulation, Regulated depth.

Abstract

Yang C. T. introduced the concept of the theory of minimum rate of energy dissipation to the study of natural strean systems. So far the theory has been efficiently applied by Yang and others for the determination of the stability of several rivers. In this paper, the variational principle basis of the theory is reintroduced and applied to the river regulation. We assume that the minimum unit stream power is the same before and after the river regulation engineering, so that an equation of hydraulic geometry is given, that is

$$\frac{h_2}{h_1} = \left(\frac{B_1}{B_2}\ \frac{Q_2}{Q_1}\right)^{9/13}$$

in which h_1 is the average depth before regulation engineering, h_2 is the regulated depth, B_1 is the width of river before regulation engineering, B_2 is the regulated width, Q_1 is the regulated discharge, and Q_2 is the discharge at he discharge at the regulated level after regulation engineering.

The equation is applied to the river regulation engineering of Dongping River in he South China for predicting its regulated depths and navigable depths. The comparisons between measured and estimated navigable depths show that the equation is effective.