

# 试论地图投影的分类\*

李长明  
(贵州大学数学系)

## 一、前言

地图投影的分类,常见的主要有两种划分标志,一是依据投影后表象的不变性(或即变形性质),二是按正常位置下经纬线的形状来区分。前者是属于内在的问题,后者是属于外在的问题<sup>[1]</sup>。

内在的问题是本质的问题,外在的问题是条件的、形式的问题。譬如在非正常位置下的投影经纬线形状就无法归纳了。所以参数分类法,只能考虑每个投影的正常情况<sup>[2]</sup>。

根据投影后的不变性,习惯上都是把地图投影分为正形的、等面积的、等距离的和任意的四类<sup>[3]</sup>。这是从实用的观点出发的。这样的分类从实质上看是有弊病的,因为它违背了逻辑学中关于分类所应遵循的基本原则,即分类应按层次逐级进行,要有纲目之别。事实上等角(正形)投影与等面积投影不应和等距离投影相提并列。习惯的投影分类由于层次不清,介于它们之间的投影就不能明显地呈现出来,因而缺乏寻找的具体途径。这正是文献[4]中表1-1上存在的问题<sup>1)</sup>。

本文的目的就是从分析投影不变量开始,先根据有无长度不变方向以及是否唯一,可把投影分为三大类型,其次又在其中区分出等角、等距、和等积三种常见的投影。最后再将分类进一步完备化。这样既体现了层次分明,又使相邻的关系有了依据,同时也由此可揭示出探求新投影的途径和方法,并具体地给出了相应于等角、等距和等积投影的各种可能的投影,从而解决了[4]中所存在的问题。

## 二、等长方向的讨论

### 1. 长度比

对于地图投影,刻划变形的各量中,长度比占着重要的地位,起着基本的作用。因为长度比变化的规律完全决定了其它各量(如角度、面积等)该如何变化。

长度的变化不但与各点的位置有关,而且在同一点处又与方向有关,这种相依关系表现为<sup>[4]</sup>:

\* 本文插图是徐燕燕同志帮助绘制的,谨致谢意。

1) [4]中表1-1列于本文后面。

$$\mu = \frac{ds'}{ds} = \sqrt{\frac{E}{M^2} \cos^2 \alpha + \frac{G}{r^2} \sin^2 \alpha + \frac{F}{Mr} \sin 2\alpha}$$

或改写为

$$\mu = \sqrt{m^2 \cos^2 \alpha + n^2 \sin^2 \alpha + mn \cos \theta' \sin 2\alpha} \quad (1)$$

其中

$$m = \frac{\sqrt{E}}{M}, \quad n = \frac{\sqrt{G}}{r}$$

是沿经纬线方向的长度比,  $\theta'$  是经纬线投影后的夹角。

(1) 式表达了在任一点处长度比  $\mu$  随方向  $\alpha$  的变化规律。

在所有方向中, 有两个极值方向, 它们是变形椭圆的长短轴方向, 它们的长度比若分别记为  $a$  和  $b$ , 则与经纬线方向的长度比有下述关系<sup>[4]</sup>:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = m^2 + n^2 \\ a \cdot b = m \cdot n \sin \theta' \end{cases} \quad (2)$$

## 2. 等长方向所满足的方程

在长度比  $\mu$  与方向的变化中, 我们需要关心沿哪些方向保持长度不变, 即研究长度比  $\mu = 1$  的情形。由 (1) 可知, 只要由方程

$$m^2 \cos^2 \alpha + n^2 \sin^2 \alpha + m \cdot n \cos \theta' \sin 2\alpha = 1$$

解出  $\alpha$  即得保持长度不变的方向。

将上述方程的两端除以  $\cos^2 \alpha$  并利用  $\sec^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha$  则得

$$(n^2 - 1) \tan^2 \alpha + 2mn \cos \theta' \tan \alpha + m^2 - 1 = 0 \quad (3)$$

这是以  $\tan \alpha$  为未知圆的二次方程, 若得出实根, 则不难求出相应的等长方向。

## 3. 根的判别式

方程 (3) 是否有实根, 完全取决于它的判别式:

$$\Delta = (mn \cos \theta')^2 - (n^2 - 1)(m^2 - 1)$$

即

$$\Delta = m^2 + n^2 - m^2 \cdot n^2 \sin^2 \theta' - 1$$

为了下面的讨论有明显的几何意义, 将经纬线方向的长度比用 (2) 换为二个主方向的长度比, 则有

$$\Delta = a^2 + b^2 - a^2 b^2 - 1$$

即

$$\Delta = (a^2 - 1)(1 - b^2) \quad (4)$$

## 4. 等长方向的讨论

依判别式 (4) 对方程 (3) 可讨论如下:

I. 当  $n^2 - 1 \neq 0$  时, (3) 确实是  $\tan \alpha$  的二次方程, 得出下面表 1。

II. 当  $n^2 - 1 = 0$  但  $mn \cos \theta' \neq 0$  时, 方程 (3) 退化为含  $\tan \alpha$  的一次方程

$$2mn \cos \theta' \tan \alpha + m^2 - 1 = 0$$

故必有一实根

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1 - m^2}{2mn \cos \theta'}$$

除此等长方向外, 还可由条件  $n^2 - 1 = 0$  得知

$$n = 1$$

这说明纬线方向  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  也是等长方向。

因此, 这种情形亦有二个不同的等长方向, 相应的判别式

$$\Delta = (mn \cos \theta')^2 > 0$$

故亦符合表 1 的结论

表 1

判别条件	方程(3)的根	等长方向
$\Delta < 0$	无任何实根	无任何等长方向
$\Delta = 0$	有唯一的实根(即相重的二个实根)	有唯一的等长方向(必为主方向之一)
$\Delta > 0$	有不同的二个实根	有二个不相同的等长方向

III. 当  $n^2 - 1 = 0$  且  $mn \cos \theta' = 0$ , 但  $m^2 - 1 \neq 0$  时, 可将(3)改为含  $\operatorname{ctg} \alpha$  的二次方程

$$(m^2 - 1)\operatorname{ctg}^2 \alpha + 2mn \operatorname{ctg} \alpha + n^2 - 1 = 0 \quad (3')$$

于是有二个相重的实根

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha = 0 \quad \text{即} \quad \alpha = \frac{\pi}{2}$$

这说明纬线方向是唯一的等长方向。

相应地  $\Delta = 0$ , 故亦合于表 1 的结论。

IV. 当  $n^2 - 1 = 0$ ,  $mn \cos \theta' = 0$  和  $m^2 - 1 = 0$  时, (3) 变为恒等式, 说明该点处的任何方向皆为等长方向。

事实上, 由条件  $mn \cos \theta' = 0$  即  $\cos \theta' = 0$  得出  $\theta' = \frac{\pi}{2}$ , 这说明经纬线方向投影后仍保持垂直。又从  $m^2 - 1 = 0$  和  $n^2 - 1 = 0$  可知, 经纬线方向都是等长方向。

上述两点表明经纬线方向既是主方向又是等长方向, 因而变形椭圆为单位圆。这与任何方向皆为等长方向的结论是一致的。

投影后没有任何变形的点, 不妨称为可展点, 由于地球是一个不可展的曲面, 因此, 这类特殊点不可能组成某个区域。至多是个别孤立的点(如方位投影的极)或一条线(如切圆锥和切圆柱投影中相切之线)。

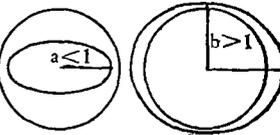
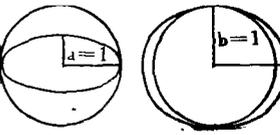
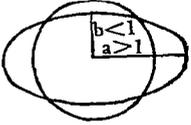
以下我们研究的分类, 都假定除去了这种不能组成区域的可展点。

### 三、依等长方向对投影的分类

#### 1. 三大类型

在某个投影区内,根据任一点处有无等长方向和等长方向是否唯一,可把投影分为下表所列的三种类型:

表 2

名 称	定 义	判别条件	等价条件	变形椭圆与单位圆的关系
椭圆型投影	任一点处皆无任何等长方向	$D < 0$	$a < 1$ 或 $b > 1$	
抛物型投影	任一点处都有唯一的等长方向	$D = 0$	$a = 1$ 或 $b = 1$	
双曲型投影	任一点处都有二个不同的等长方向	$D > 0$	$b < 1 < a$	

此处名称的由来是仿照解析几何对二次曲线的划分的叫法。在那里,没有渐近方向的称为椭圆型,有一个渐近方向的叫抛物型,有二个渐近方向者谓之双曲型。

## 2. 性质——与旧的类别之关系

现在区分的三大类型与旧的类别有下述关系:

### I. 等角投影必属椭圆型

证: 因等角投影的特征是

$$a = b$$

代入(4)中可得

$$\Delta = -(a^2 - 1)^2 < 0$$

故等角投影确属椭圆型投影。

### II. 等距投影=抛物型投影

证: 若投影是等距的,则沿某一主方向的长度不变,即  $a = 1$  或  $b = 1$

这是判定抛物型的等价条件,故等距投影是抛物型投影。

反之,若投影是抛物型的,则依判定的等价条件就有  $a = 1$  或  $b = 1$

这正是等距投影的特征,故抛物型投影也一定是等距投影。

### III. 等积投影必属双曲型

证: 因等积投影的条件是

$$a \cdot b = 1$$

$$b = \frac{1}{a}$$

即

代入(4)中则有

$$\Delta = (a^2 - 1)\left(1 - \frac{1}{a^2}\right) = a^2\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)^2 > 0$$

故等积投影一定是双曲型的。

### 3. 细分

由上可知,椭圆型中除等角投影外尚有其它投影,又双曲型投影中除等积投影外也有另外的投影,下面将会看到这正是[4]中表 1-1 上的 3、5 两类,故可细分如下:

表 3

名 称		判 定 条 件		相当于 [4] 中表 1-1 上的投影类
椭圆型	等角投影	$\Delta < 0$	$a = b$	2
	非等角投影	$a < 1$ 或 $b > 1$	$a \neq b$	3
抛物型	(即等距投影)	$\Delta = 0 \Leftrightarrow a = 1$ 或 $b = 1$		4
双曲型	非等积投影	$\Delta > 0$	$a \cdot b \neq 1$	5
	等积投影		$a \cdot b = 1$	6

### 4. 分类的几何图象

从判别各类投影的等价条件和确定等角、等距和等积投影的条件可以看出:区分各种投影的主要标志在于变形椭圆的二半轴  $a$ 、 $b$  满足哪样条件。为了比较这些条件,找出它们的相互关系,我们在平面直角坐标中,用二坐标轴表示变形椭圆的二半轴。这样一来,各种投影所满足的条件就可在此坐标系中直观地用几何图象反映出来。

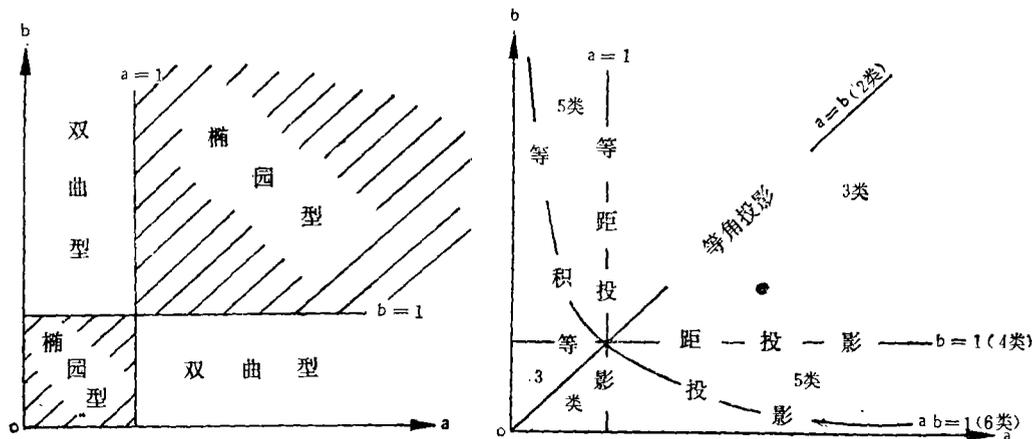


图 1

图 2

因椭圆的二半轴皆为正数,故投影条件的图象必全在第一象限,不妨记为  $\{0; a, b\}$ 。

显然,二直线  $a = 1$  和  $b = 1$  代表等距投影。

又此二直线把第一象限分成四部分,对顶的两部分算一区域,则此二区域分别表示椭圆型和双曲型的条件(图 1)。

相应于表 3 上的细分,各投影条件的图象如图 2 所示。从此图象上就能看出椭圆型的非等角投影应该相当于[4]中表 1-1 的第 3 类。类似地,双曲型的非等积投影又与[4]

中表 1-1 的第 5 类相应。

## 四、新投影之探求

### 1. 确定投影的原则

从上述几何图象中,我们看出:椭圆型和双曲型对应于两大区域,因而可以细分出用直线  $a = b$  确定的等角投影和由双曲线  $ab = 1$  确定的等积投影。而抛物型的图象却是两大区域的分界线  $a = 1$  和  $b = 1$ ,因而不能再细分出属于它的子项。

由此可见,在平面  $\{0; a, b\}$  上任作一条曲线就可代表一种投影。这种投影的特征是其变形椭圆有该曲线所反映的函数关系。

按此原则,我们若在椭圆型的非等角区域内作某一曲线,则此曲线就介于直线  $a = b$  与  $a = 1$  或  $b = 1$  之间(如图 3),因此它所确定的投影,其变形椭圆的特征也就介于等角与等距投影之间,这正是[4]中表 1-1 上第 3 类投影所要求的。故此第 3 类投影的图象就是椭圆型区域内除去直线  $a = b$  所余下的部分。

同样,在双曲型的非等积投影区域内作一条曲线,则此曲线就介于双曲线  $ab = 1$  和直线  $a = 1$  或  $b = 1$  之间(图 4),而它所代表的投影,其变形椭圆的特征就介于等积与

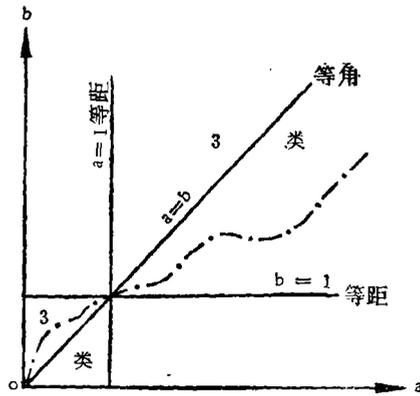


图 3

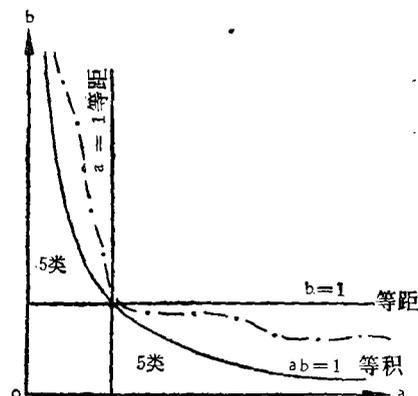


图 4

等距投影之间。这也正是[4]中表 1-1 上第 5 类投影所要求的。因此,双曲型非等积投影就正是此第 5 类投影。

### 2. 确定各类投影的统一函数式

为了具体地得出[4]中表 1-1 上的 3、5 两类投影,同时也为便于比较各类投影的相互关系,首先需要将平面  $\{0; a, b\}$  上用以确定投影的曲线用统一的函数式表达出来,为简便计,我们选取一类最简单的函数——幂函数

$$y = x^n$$

其中  $n$  为任意实数。为清楚起见,这里用  $x$  轴和  $y$  轴分别代替表示变形椭圆二半轴的  $a$  轴和  $b$  轴。

显然幂函数  $y = x^n$  具有以下性质。

I. 对任何实数  $n$ , 除原点外, 容易验证它们的图象还通过各区的一个分界点  $E(1, 1)$ , 如图 5。而且除此而外, 任二幂函数的图象不相交。

II. 等角、等距和等积这三种特殊的投影皆可用幂函数来表示, 事实上

当  $n = 1$  时,  $y = x$  (即  $b = a$ )。对应着等角投影。

当  $n = 0$  时,  $y = 1$  (即  $b = 1$ ), 对应着等距投影。

当  $n = -1$  时,  $y = x^{-1}$  (即  $b = \frac{1}{a}$ ), 对应着等积投影。

由此可以看出:

当  $0 < n < 1$  时,  $y = x^n$  所确定的投影是椭圆型的非等角投影(即第 3 类);

当  $-1 < n < 0$  时,  $y = x^n$  所确定的投影是双曲型的非等积投影(即第 5 类)。

更完全的讨论则为(表 4):

III. 幂函数  $y = x^n$  所确定之投影一览表。(见表 4)

### 3. 另一类统一表达式

除幂函数外, 我们也可用线性函数  $y = 1 + K(x - 1)$  统一表示其中四类投影, 其中  $K$  表示直线的斜率, 不难作出相应的区分表如表 5。

Г. И. Конусова<sup>[3]</sup> 把

$$a - 1, \quad b - 1$$

或

$$P - 1, \quad W - 1, \quad \left( W = \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ + \frac{\omega}{4} \right) \right)$$

看成平面上矢量的坐标, 并提出以两个矢量间的角度作为两个投影间按变形性质相近程度的尺度<sup>[3]</sup>。在该文中只对矢量  $\{P - 1, W - 1\}$  作了详细的讨论, 而省略了前者。如果改用矢量  $\vec{p}^* = \{a - 1, b - 1\}$ , 那么上面讨论的一系列投影 [即  $y - 1 = k(x - 1)$  所确定的投影] 其中的  $k$  正是该投影与基矢量  $\vec{k}^* = \{a_k - 1, 0\}$  之夹角的正切。不过这时另一基矢量为  $\vec{e}^* = \{0, b_e - 1\}$ , 它与  $\vec{k}^*$  把等距投影分成沿短轴不变和沿长轴不变的两类(见下节)。

### 4. 投影的坐标表达式

既然我们划分的五类投影, 其变形椭圆的二半轴之相依关系可由幂函数  $y = x^n$  (即  $b = a^n$ ) 统一表示。因此, 由它也可以将这五类投影的坐标表达式用统一的公式给出\*。现以圆柱投影和圆锥投影为例分别求之。

#### I. 圆柱投影

这时投影的坐标表达式是<sup>[4]</sup>:

$$\begin{cases} x = f(\varphi) \\ y = \alpha \cdot \lambda \end{cases} \quad (5)$$

\* 在 [5] 中曾有类似的表达方法, 但没有从根本上来探讨。

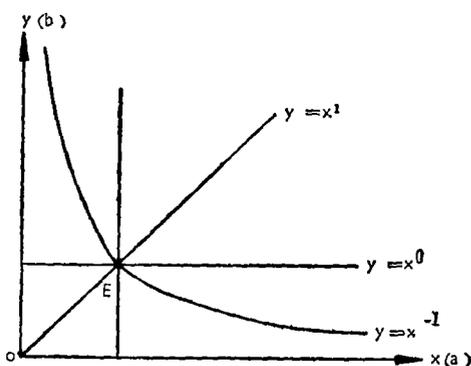
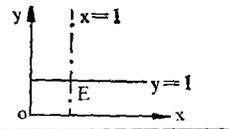
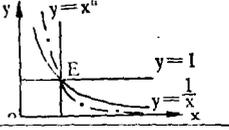
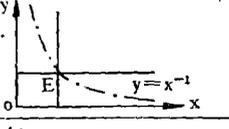
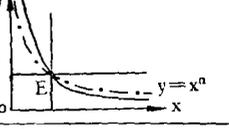
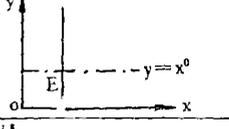
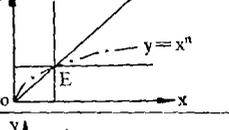
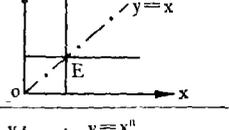
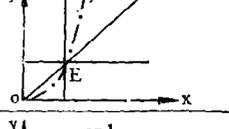
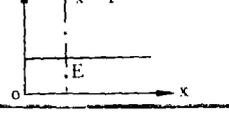


图 5

表 4

$n$ 的值域	$y = x^n$ 所确定的投影	[4]中表 1-1 相应类号	$y = x^n$ 的图象
$-\infty \leftarrow n^{**}$	抛物型投影(等距投影)	4	由反函数 $x = y^{\frac{1}{n}}$ 可知当 $n \rightarrow -\infty$ 时, $x \rightarrow 1$ 
$-\infty < n < -1$	双曲型内的非等积投影	5	
$n = -1$	双曲型内的等积投影	6	
$-1 < n < 0$	双曲型内的非等积投影	5	
$n = 0^*$	抛物型投影(等距投影)	4	
$0 < n < 1$	椭圆型内的非等角投影	3	
$n = 1$	椭圆型内的等角投影	2	
$1 < n < \infty$	椭圆型内的非等角投影	3	
$n \rightarrow \infty^{**}$	抛物型投影(等距投影)	4	

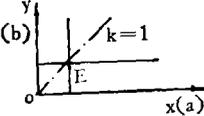
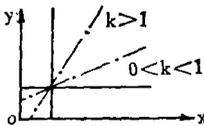
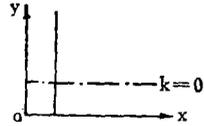
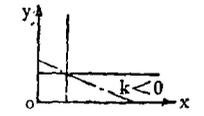
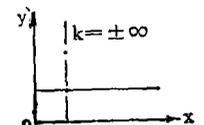
\* 对任一正数  $\varepsilon$ , 在区间  $[\varepsilon, \infty]$  上, 当  $n \rightarrow 0$  时,  $y = x^n$  一致收敛于  $y = 1$ 。

\*\* 对反函数  $x = y^{\frac{1}{n}}$ , 在同样的区间  $[\varepsilon, \infty]$  上, 当  $n \rightarrow \pm\infty$  时,  $x = y^{\frac{1}{n}}$  一致收敛于  $x = 1$ 。

其中  $\alpha$  是一常数,  $f(\varphi)$  是待求的函数。

因正圆柱投影中经纬线的夹角保持不变, 即经纬线方向就是主方向, 现用  $b$ 、 $a$  分别

表 5

$R$ 的值域	$y = 1 + R(x-1)$ 所确定的投影	[4]中表 1-1 相应的类号	$y = 1 + R(x-1)$ 的图象
$R = 1$	椭圆型内的等角投影	2	
$1 < R < \infty$ 或 $0 < R < 1$	椭圆型内的非等角投影	3	
$R = 0$	抛物型投影(等距投影)	4	
$R < 0$	双曲型内的非等积投影	5	
$R \rightarrow \pm\infty$	抛物型投影(等距投影)	4	

表示经纬线的方向,则有<sup>[4]</sup>:

$$b = m = \frac{dx}{M d\varphi}, \quad a = n = \frac{\alpha}{r}$$

故相应的幂函数  $b = a^n$  变为

$$\frac{dx}{M d\varphi} = \left(\frac{\alpha}{r}\right)^n$$

分离变量并积分得

$$\int dx = \alpha^n \int \frac{M}{r^n} d\varphi$$

即

$$x = \alpha^n \int \frac{M}{r^n} d\varphi \quad (6)$$

这就是五类投影的一种统一公式,  $n$  取不同的实数值就得出相应于表 4 中所列的各类投影。

## II. 圆锥投影

在极坐标系中,坐标表达式是

$$\begin{cases} \rho = f(\varphi) \\ \delta = \alpha \cdot \lambda \end{cases}$$

其中  $\alpha$  是小于 1 的常数,  $f(\varphi)$  是待求的函数。

同圆柱投影一样,正圆锥投影中经纬线方向也是主方向,仍用  $b$ 、 $a$  表示经纬线方向的长度比,则由 [4] 有:

$$b = m = -\frac{d\rho}{M d\varphi}, \quad a = n = \frac{\alpha\rho}{r}$$

这时幂函数  $b = a^n$  变为

$$-\frac{d\rho}{M d\varphi} = \left(\frac{\alpha\rho}{r}\right)^n$$

分离变量并积分之,有

$$-\int \frac{d\rho}{\rho^n} = \alpha^n \int \frac{M}{r^n} d\varphi$$

当  $n = 1$  时(即等角圆锥投影),在 [4] 已求出为

$$\rho = \frac{K}{U^\alpha} \quad (7)$$

其中

$$U = \frac{\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\psi}{2}\right)}, \quad K \text{ 为积分常数。}$$

当  $n \neq 1$  时,则为

$$\frac{1}{n-1} \rho^{1-n} = \alpha^n \int \frac{M}{r^n} d\varphi + c \quad (8)$$

这就是圆锥投影中 3—6 类的统一公式。

类似地,对于  $y = 1 + K(x-1)$  的函数形式,利用线性微分方程的积分方法亦可得出圆锥、圆柱投影等的统一坐标表达式。

## 五、分类的完备化

在上述分类中,我们尚未发现相应于 [4] 中表 1-1 上第 1、第 7 两类投影,究竟是这两类投影根本就不存在,或者是新的分法不够完备而遗漏了它们? 为了回答这一问题,应从完备性着手。

### 1. 投影的两大类

在前面按等长方向的有无和是否唯一进行分类时,我们要求在整个区域内的所有点要末都有二等长方向(双曲型),要末都只有唯一的等长方向(抛物型),或者皆无等长方向(椭圆型)。这样就把为数甚多的投影排斥在外,例如,若确定投影的条件是: 每一点的变形椭圆,其半长轴皆为半短轴的二倍,即有

$$b = \frac{1}{2} a$$

那么,在平面  $\{0; a, b\}$  上容易看出

当  $a < 1$  时,变形椭圆在单位圆内,故应为椭圆型。

当  $a > 2$  时,变形椭圆又在单位圆外,亦应为椭圆型。

但当  $a = 1$  或  $a = 2$  时,变形椭圆与单位圆相切,则为抛物型。

又当  $1 < a < 2$  时,变形椭圆与单位圆相交,故为双曲型。

由此可见,就整个投影讲,它不完全属于哪一型,这就说明前面分的五种投影是不完备的。为了弥补这一缺陷,我们首先应该把所有投影分成如下的两大类:

单纯投影——除去可展点外,所有点处的等长方向之个数是一样多的;

混合投影——除去可展点外,所有点处的等长方向之个数不完全相同。

这样一来,分类就完备了。因为不论怎样的投影,要末是单纯的,要末是混合的,二者必居其一。

### 2. 混合投影中的两种重要情形

原则上讲,在平面  $\{0; a, b\}$  上,只要同时经过椭圆型区和双曲型区的任一曲线皆可确定一类混合投影,因此,混合投影的类别不比单纯投影少。然而,联系着等角与等积投影,有两类是其推广,在比较变形时也占着重要地位。分述如下:

#### I. 准相似投影

定义: 若变形椭圆的二半轴之比恒等于常数  $K \approx 1$ , 则它所确定的投影称为准相似投影。

性质: 由于二半轴之比等于常数  $K \approx 1$ , 故各点处的变形椭圆是彼此相似的, 因此, 虽有角度变形, 但各点的角度变形是一样的。这可视为等角的推广。因此名为“准相似”投影。

在平面  $\{0; a, b\}$  上, 准相似投影的条件

$$\frac{b}{a} = K$$

所对应的图象是过原点的直线(图7)。

由于准相似投影中, 各点有相同的角度变形, 因此, 在反映变形的平面  $\{0; a, b\}$  上,

直线  $b = Ka$  就能形象地表示出角度变形的大小, 显然它与直线  $b = a$  偏离的程度愈大, 则表示角度变形亦愈大。象表示地形的等高线一样, 我们可称直线  $b = Ka$  为等角度变形线, 于是对于所有的  $K$ , 直线族  $b = Ka$  就能起着比较角度变形的作用。

#### II. 倍积投影

定义: 若每一点的面积比等于常数  $l \approx 1$ , 则称此投影为倍积投影。

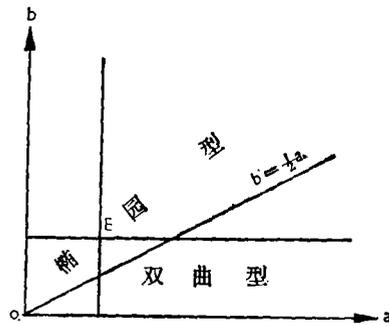


图 6

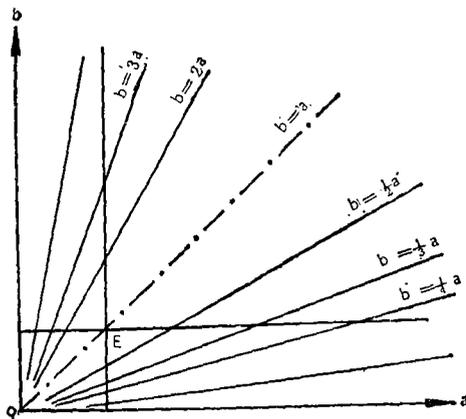


图 7

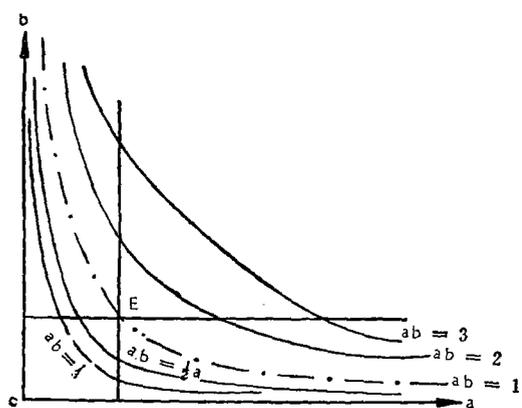


图 8

性质：倍积投影显然是等积投影的推广。

同前一样，在平面  $\{0; a, b\}$  上确定倍积投影之条件

$$ab = l$$

其图象是一支双曲线。

由于双曲线  $ab = l$  上的所有点反映着相同的面积变形。因此也可称它为等面积变形线。这样， $l$  取所有常数值就得出以坐标轴为公共渐近线的一族双曲线（图 8），它形象地反映着面积变形的大小。显然，以  $ab = 1$  为准，散离程度愈大则面积变形亦愈大。因此，这族双曲线就能起着比较、量测面积变形的作用。

度愈大则面积变形亦愈大。因此，这族双曲线就能起着比较、量测面积变形的作用。

### 3. [4] 中表 1-1 上第 3、5 两类投影的性质

利用等角度变形线与等面积变形线所组成的量测网，就可证实椭圆型的非等角投影与双曲型的非等积投影分别具有 [4] 中表 1-1 上第 3、5 两类的那些性质（图 9）

### 4. 单纯投影的另一分法

由上看来，如果严格地区分出主方向的大小，即始终规定  $a \geq b$ ，那末图 9(a) 就变为图 9(b)。这样一来，抛物型就分为有不同变形性质的两类投影：沿长轴方向的等距投影 ( $a = 1$ ) 和沿短轴方向的等距投影 ( $b = 1$ )。相应地整个投影又可分为八类，并按变形的大小与变化速度比较，如表 6：

因为在各类投影中角度变形都可能很大，因此只能比较其变化的快慢。

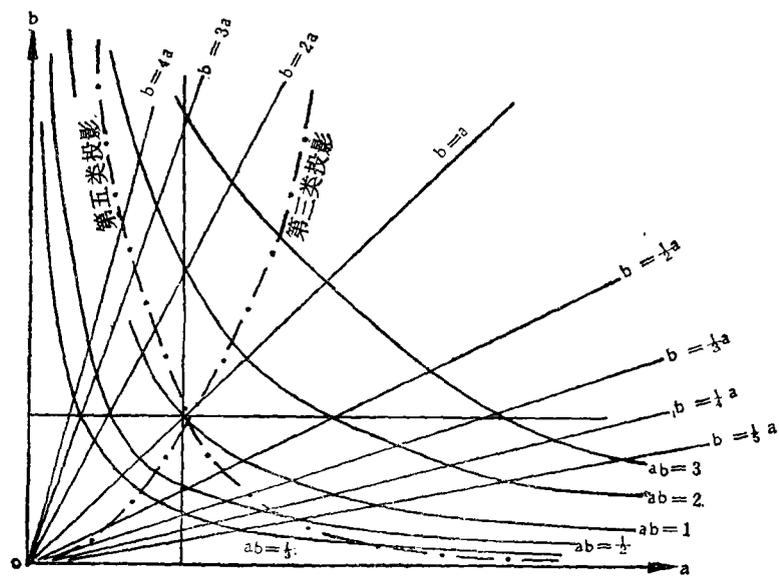


图 9(a)

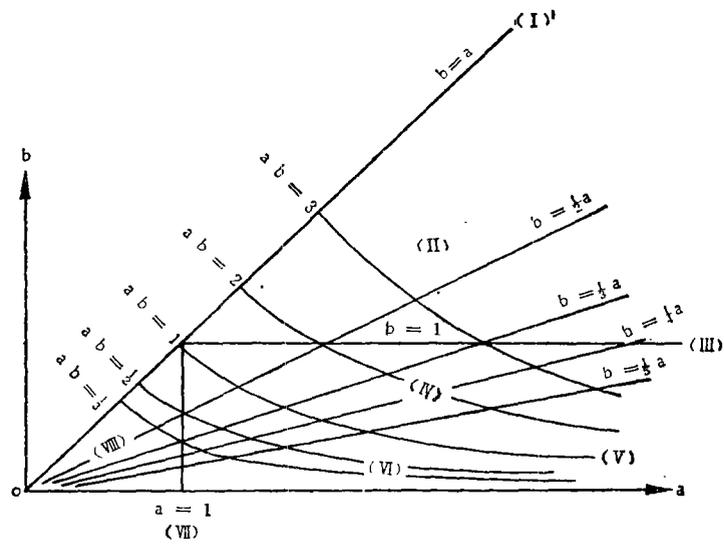


图 9(b)

表 6

新类号	特征	名称 (所属之投影)	旧类号	角度变形 $W-1$ 的 变化速度 (与半长 轴的平方相比较)	面积变形的大小与速度 (与半长(短)轴及其平方相比较)	
I	$a=b$	椭圆型中的等角 投影	2	0	面积 变形 大 $P-1 > 0$	极速 $P-1 = a^2 - 1$
II	$a > b > 1$	椭圆型中的非等 角投影	3	低 速 $W-1 < a^2 - 1$		高 速 $a^2 - 1 > P-1 > a-1$
III	$b=1$	抛物型中沿短轴 方向中的等距投影	4			中速 $P-1 = a-1$
IV	$a > 1 > b > \frac{1}{a}$	双曲型中的非等 积投影	5			低速 $P-1 < a-1$
V	$b = \frac{1}{a}$	双曲型中的等积 投影	6	中速 $W-1 = a^2 - 1$		0
VI	$a > 1 > b > \frac{1}{a}$	双曲型中的非等 积投影	5	高 速(包括极速, 见下节) $W-1 > a^2 - 1$	面积 变形 小 $P-1 < 0$ ( $1-P > 0$ )	低速 $1 - P < 1 - b$
VII	$1 = a > b$	抛物型中沿长轴 方向的等距投影	4			中速 $1 - P = 1 - b$
VIII	$1 > a > b$	椭圆型中的非等 角投影	3			高速 $1 - P > 1 - b$

这样细分的优点是更准确地区分出它们的变形性质,也容易看出其间的相互关系。例如,把等距投影(抛物型)按主方向大小的不同分为 III、VII 两类,其变形性质确实不同:前者面积变形大但角度变形变化慢,后者面积变形小但角度变形变化快。因此,深入分析研究等距投影的变化时,就有必要如此考虑。否则就有可能产生遗漏和差错。譬如在[3]中,以  $\rho = \{P-1, W-1\}$  作为代表投影的矢量,这时基矢量  $\bar{k} = \{P_k-1, 0\}$  和  $\bar{e} = \{0, W_k-1\}$  正好表示等角和等距投影。Г. И. Конусова 提出:用二矢量间的夹角作为它所代表的二投影间变形性质相近的尺度。设  $\rho$  与二基矢量  $\bar{k}$ 、 $\bar{e}$  的夹角分别为  $\alpha$ 、

$\beta$ , 则不难由公式得出

$$\cos \alpha = \frac{\bar{\rho} \cdot \bar{K}}{|\bar{\rho}| \cdot |\bar{K}|} = \frac{(P-1)(P_K-1)}{|\bar{\rho}| \cdot |P_K-1|} = \pm \frac{P-1}{|\bar{\rho}|} \begin{cases} \text{当 } P_K-1 > 0, \text{ 取“+”} \\ \text{当 } P_K-1 < 0, \text{ 取“-”} \end{cases}$$

因  $\bar{K}$ ,  $\bar{e}$  互相垂直, 故

$$\sin \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) = \cos \beta = \frac{\bar{\rho} \cdot \bar{e}}{|\bar{\rho}| \cdot |\bar{e}|} = \frac{(W-1) \cdot (W_e-1)}{|\bar{\rho}| \cdot |W_e-1|} = \frac{W-1}{|\bar{\rho}|}$$

于是有

$$\operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{W-1}{\rho-1}$$

据此 [3] 中断定“等距离投影按变形性质严格地处于正形与等面积之间, 与后者构成  $45^\circ$  之角”。笼统地对等距离投影这样讲是不正确的。事实上

对沿短轴方向的等距投影

$$\because b=1, \quad \therefore \operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{\frac{a}{b}-1}{ab-1} = \pm \frac{a-1}{a-1} = \pm 1, \quad \therefore \alpha = \pm 45^\circ$$

而对沿长轴方向的等距投影

$$\because a=1, \quad \therefore \operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{\frac{a}{b}-1}{ab-1} = \pm \frac{\frac{1}{b}-1}{b-1} = \pm \frac{1}{b} \quad \therefore \alpha \neq 45^\circ$$

因此按上述尺度, 只能说沿短轴方向的等距投影才严格地处于正形与等积投影之间。

分成上述八类也有缺点, 因为从分析投影表达式和变形量常常事先不能区分出二主方向的大小, 事实上它们常处于统一体中, 例如: 等距圆锥投影是指沿经线方向的长度不变, 但在等距离的割圆锥投影中, 位于二割线之间属于  $a=1$  (即 VII 类), 而位于二割线之外则是  $b=1$  (即 III 类)。

这样把统一表达的投影分隔为相距甚远的投影, 无论是对分析已知的投影或探求新的投影都带来不便, 在实践中也无此必要, 因此, 以下按本文开始提出的类型分析比较。

#### 5. [4] 中表 1-1 上第 1、7 两类投影的理解与探求

根据上述的比较变形大小的量测网, 即使混合型投影中也找不出比等角投影的面积变形(甚大)还要大(非常大)的投影。因此, [4] 中表 1-1 上第 1 类投影是不存在的。同样, 第 7 类也是不存在的。但若

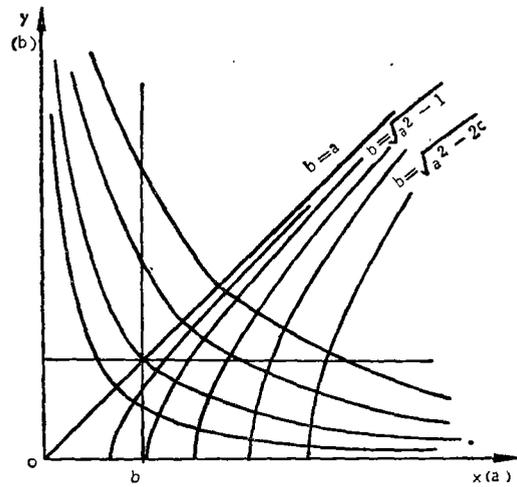


图 10

第 1、7 两类的理解改变一下, 则可探求如下:

#### I. 第 1 类的理解与探求

[4] 中表 1-1 上对第 1 类的要求是面积变形非常大, 由于在等面积变形线族中, 距

$ab = 1$  愈远则面积变形愈大, 但这是无止境的。等角投影的图象  $a = b$  正体现了这一要求。故这样的第 1 类是不存在的。现在如果将“非常大”理解为变形的变化速度最快, 正如山坡表面的坡度最陡一样, 那末可如下探求。

由于等面积变形线实为数量场内的等量线, 而数量场中变化最快的方向是沿着等量线的法线方向。因此, 面积变形变化最快的路线应为双曲线族

$$x \cdot y = l \quad (9)$$

的正交轨线。

因双曲线族 (9) 所满足的微分方程为

$$y + x \cdot y' = 0$$

$$\text{即 } y' = -\frac{y}{x} \quad (10)$$

再利用垂直条件即得其正交轨线所满足的微分方程为

$$y' = \frac{x}{y}$$

$$\text{即 } ydy = xdx$$

积分之, 得

$$\frac{1}{2} y^2 + c = \frac{1}{2} x^2$$

即所求的正交轨线为

$$x^2 - y^2 = 2c \quad (11)$$

这是一族包括直线  $x = y$  并以它为渐近线的双曲线族 (图 10)。于是在平面  $\{0; a, b\}$  上由等式

$$b = \sqrt{a^2 - 2c} \quad (11')$$

所决定的投影就具有面积变形变化最剧烈的投影。

特别地, 当  $c = 0$  时, 就是单纯投影中的等角投影 ( $a = b$ )。这就是说, 面积变形变化速度最快的投影, 也不过是与等角投影同级的。因此, 即使这样理解的第 1 类投影, 仍然是不存在的。

## II. 第 7 类投影的理解与探求

[4] 中表 1-1 对第 7 类的要求是角度变形非常大, 由于在等角度变形线族中, 偏离  $a = b$  愈甚者, 角度变形愈大。这偏离的极限是二坐标轴。因此, 角度变形非常大的只能属于双曲线型 (即等面积投影或第 3 类), 这说明第 7 类投影也是不存在的。但若类似地将非常大理解为变形的变化速度最快, 那末可探求如下:

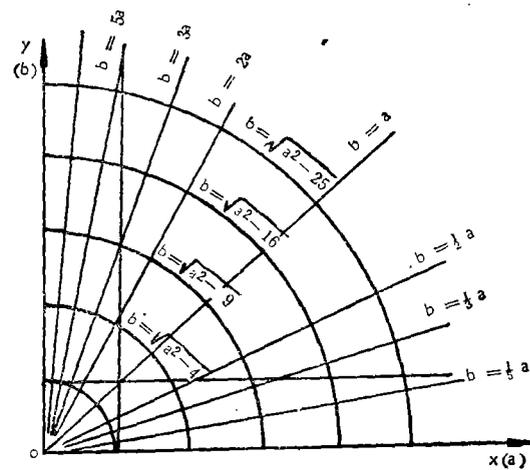


图 11

同前一样, 这样的投影应从等角度变形线所形成的数量场中去找, 亦即找出射线族

$$y = Kx \tag{12}$$

的正交轨线。

因(12)所满足的微分方程为

$$y' = \frac{y}{x} \tag{13}$$

同样由垂直条件可得其正交轨线所满足的微分方程为

$$y' = -\frac{x}{y} \tag{14}$$

分离变量并积分, 则得

$$\frac{1}{2} y^2 = -\frac{1}{2} x^2 + c$$

故所求的正交轨线是一族以原点为中心的圆(图 11):

$$x^2 + y^2 = 2c \tag{15}$$

相应地在平面  $\{0; a, b\}$  上以圆弧

$$b = \sqrt{2c - a^2} \tag{15'}$$

所确定的投影就具有角度变形变化最急速的特性, 由于等积投影  $ab = 1$  不含在这族正交轨线(15')中, 所以它们的角度变形确实变化得剧烈。因此, 这是在上述理解下的第 7 类投影。

由于当  $c = 1$  时, (15') 代表过 (1, 1) 点的圆弧, 属于双曲线的第 5 类。又当  $c \leq \frac{1}{2}$

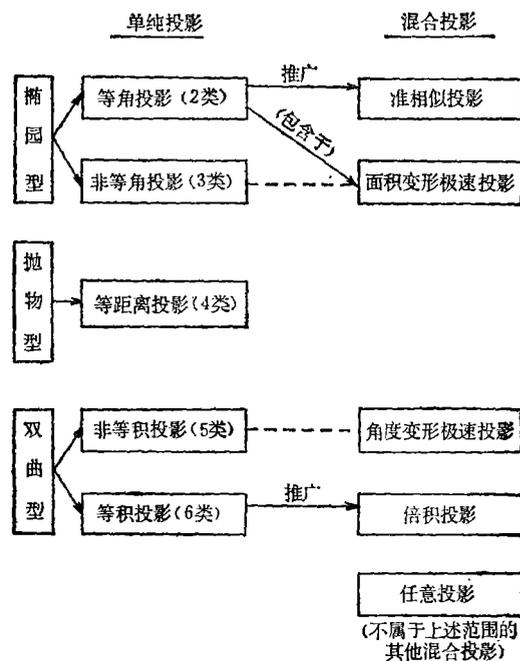


图 12

(注: 以上括号内的数字相应于 [4] 表 1-1 上的编号)

时,代表的圆弧位于椭圆型。所以,在新理解的意义下,这就不是[4]中表 1-1 上所列的第 7 类。正确的名称宜为“角度变形极速投影”。

总结以上所述,我们把地图投影分类综合如下(图 12)。

### 参 考 文 献

- [1] Peter Richardus, Ron K Adler 著,《地图投影》,中国人民解放军测绘学校译印,1975。  
 [2] Waldo R Tobler,《地图投影的分类》,陆澈芬译,《测绘译丛》,1964 年第 3 期  
 [3] Г. И. Конусова: «О классификации картографических проекций по характеру искажений», *известия вуз геодезия и аэрофотосъемка*, 1975. 3.  
 [4] 胡毓巨,《数学制图学》,中国工业出版社,1964 年。  
 [5] 周承恭,《根据变形椭圆探求新投影的问题》,《测量制图学报》,1(1),1957 年。

附:

表 1-1\*

类	投 影	P-1		变 形 比 较		$\omega$		备 注
		↑ ↓	} $\neq 0$ } $= 0$ } $\neq 0$	面 积	角 度	↑ ↓	} $\neq 0$ } $= 0$ } $\neq 0$	
1	等 角			↑	} $\neq 0$			非 常 大
2		甚 大	无 变 形					
3		大	不 大					
4	等 距 离	↓	} $\neq 0$	中 等	中 等	↓	} $\neq 0$	
5	不 大			大				
6	等 面 积	↓	} $= 0$	无 变 形	甚 大	↓	} $\neq 0$	
7				—	非 常 大			

\* 见文献[4]第 19 页,表 1-1。

## ON THE CLASSIFICATION OF MAP PROJECTIONS

Li Changming

(Department of Mathematics, Guizhou University)

### ABSTRACT

Through analyzing the invariants in map projection and according to the conditions whether there are any directions along which length of segments is true, the author finds that the projections can be mainly divided into three categories, i.e., elliptic, parabolic and hyperbolic. A new way of studying map projection has been derived and the problems remained in Prof. Wu's monograph "mathematic cartography" (1964, in Chinese) are solved.