

橫軸墨卡托投影和高斯-克呂格投影

方 俊

(中國科學院地理研究所)

一. 引 言

我們知道任何一種投影都可以同時具備幾個條件, 假如原面是一個正球面的時候, 這些條件是平行不悖, 可以同時得到滿足的, 但是如果原面不是一個正球面, 而是一個橢球面時, 則情形就不完全如此; 這就是說, 在這些條件之中必然會有一兩個是彼此矛盾而不能同時得到滿足的。因此, 我們可以想像得到, 假如原面是一個橢球面, 我們往往可以得到兩個以上的投影, 它們分別滿足不同的條件, 但是在正球面上則完全包括在一個投影之內。我們可以以球面投影為例來說明此點。我們知道一個正球面的球面投影必須具備以下的條件^[1]:

(1) 它是一個正形投影, 因此可以用複虛數函數來表示它們的坐標關係, 即

$$x+iy=f(q+ih),$$

式中 x, y 為平面直角坐標, q 和 h 各為等量緯度與經度, $i=\sqrt{-1}$;

(2) 它是一個透視的中心投影, 投影的頂點在球面之上;

(3) 由第 2 條的前一條件產生以下條件: 從中心到任何一點的大環(大地線)用直線來表示, 這線的方位是正確的;

(4) 由於第 2 條的後一條件產生以下條件: 從中心到任何一點的投影距離等於

$$d=2r\tan\frac{1}{2}\theta,$$

式中 θ 為此點與中心在球面上的中心角, r 為地球半徑。

這四個條件對於正球面的球面投影來說是彼此協調, 並從一個條件出發, 必然會得到另一條件。但對於橢球面來說, 則四個條件中至少可分成二組。首先, 如果我們假定第 2 條, 即用透視方法來求得投影, 則所得的決不是一個正形投影, 同時它不能符合第 3, 4 條的要求, 這種投影在實用上毫無意義, 我們可以捨去不談。現在在測量上所採用的投影皆以正形為原則。所以我們先假定第 1 條, 即投影為正形的, 將此條

件和第 3 條相配合,即得到一個正形的等方向投影,這就是愛格特的球面投影^[2]。在這個投影上,第 4 條是不能滿足的。另外一種配合方法是第 1 條和第 4 條,但這裏所說的第 4 條,即用 $2r \tan \frac{1}{2}\theta$ 來表示距離也是有條件的,它只能用於中央經線之上,並非所有從中心到任何點的距離都是如此,我們在這裏得到法國露西里的投影^[3]。

其他的投影亦大多如此,例如,我們當然不難得到一個以地球中心為投影頂的橢球面的平面透視投影,但是我們至今還沒有找到一個可以用直線來表示橢球面上任何大地線的投影。但是對於正球面,則以上兩個條件都在同一種投影——日晷投影——得到滿足。

但是我們也可有另一種情況,在有些投影中,假如投影的軸是正的時,則不論對於正球面或在橢球面都是一律的。例如,在墨卡托投影中,不論對於正球面或橢球面來說,都可以滿足以下條件¹⁾:

- (1) 它是一個正形投影;
- (2) 它的經緯線是用兩組互相正交的平行線來表示;
- (3) 經線間隔相等;
- (4) 任何緯線與赤道間的距離用以下公式表示:

$$y = r \ln \tan \left(45^\circ + \frac{B}{2} \right) \cdots \cdots \text{對於球面};$$

$$y = a \ln \tan \left(45^\circ + \frac{B}{2} \right) \left(\frac{1 - e \sin B}{1 + e \sin B} \right)^{\frac{e}{2}} \text{對於橢球面};$$

式中 r 為正球的半徑, a 則為橢球的赤道半徑, e 為橢球面離心率的平方根, \ln 表示自然對數;

- (5) 恆向線(或稱航線)用直線表示。

現在若將投影軸旋轉 90° ,則得到一個橫軸的投影。此時,正球面和橢球面就有了差別。對於正球面來說,橫軸的墨卡托投影的公式不難從正軸投影的公式旋轉 90° 來得到,或者在正軸投影公式中,以球面直角坐標代替地理坐標,因此得到平面坐標和球面直角坐標的關係,然後再將球面直角坐標換算成地理坐標,即得所需的公式。從這裏我們可以看出橫軸投影上的一切條件和正軸投影的完全相同,所異者不過是後者以地理坐標為標準,而前者則以球面直角坐標為標準而已。

對於橢球面來說,則橫軸墨卡托投影將不只一種。在大地測量中,我們採用一種

1) 見[1], 221 頁。

投影,它是一個橫軸的正形圓柱投影,它僅能滿足以上所列的第(1)及第(3)條,而此處的第(3)條必須改為:中央經線是等長的,以符合橫軸的要求。此種投影為德人高斯所創造(1825—1830年),而由德人克呂格推演出它的計算公式(1912年),因此,德人開始命名為高斯-克呂格投影。在英美書籍中則稱之為橫軸墨卡托投影,但這個投影對於橢球面來說,和墨卡托投影毫無共同之點,故此命名是不恰當的。

本文中將從墨卡托投影的坐標公式出發,利用橢球面直角坐標來求出橫軸投影的公式。正如所求得的公式表示,這個投影和高斯-克呂格投影十分接近,僅在四次項內相差一個包括 η^2 的一項,即差數的等級為

$$\eta^2 \times \left(\frac{l}{\rho''} \right)^4, \left(\eta^2 = e''^2 \cos^2 B, e''^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}, \frac{l}{\rho''} \text{為經度,以秒為單位} \right),$$

這個差數適為橫坐標與高斯的子午線收斂角和橢球面子午線收斂角的差數乘積的 $1/4$ 。

二. 球面直角坐標及橫軸墨卡托投影

我們所習用的地理坐標是以赤道為基本平面,凡與這個基本平面相平行的平面和球面相交的小環稱為平行圈,也就是我們的緯線,凡是通過基本平面的兩極(就是通過球心並與赤道相垂直的直線與球面相交的兩個點子)的大環則稱為經線。經線和緯線在球面上組成一個坐標網,就是經緯線網。現在若將這個坐標網旋轉 90° ,也就是以通過任何一條經線的平面(稱為中央經線)為基本平面,則兩個極點就不再在地極之上,而落在我們的赤道之上,從任何一個極點到中央經線都是 $=\frac{\pi}{2}$ 。現在如果仿照緯線的方法,做一系列的平面,平行於中央經線平面,則得一組平行圈;同時通過兩極作大環,則兩組曲線組成球面上的球面直角坐標網,它的形狀完全和經緯線網相同,不過是旋轉了 90° 。現在我們來推求球面直角坐標和經緯度的關係。

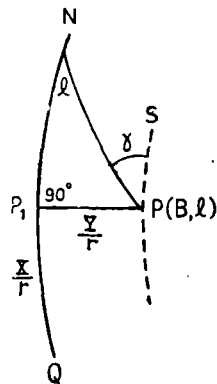


圖 1

設圖 1 中, NQ 表示中央經線, N 為極點, Q 則在赤道之上。 P 為中央經線以外的任何一點, 它的經度為 l (以中央經線為零), 緯度為 B 。通過 P , 作 NQ 的平行圈 SP , 則 NPS 就是 P 點上的子午線收斂角, 以 γ 代之; 又通過 P 及 NQ 的極(即中央子午線的極, 未在圖上表示)作大環與 NQ 交於 P_1 , P_1 上的角為直角, 而 QP_1 和 P_1P

則爲 P 點的球面直角坐標, 設 $P_1P=Y$, $QP_1=X$, 這是用球面上的表面距離來表示的, 假如皆以球半徑 r 來除, 則得以弧角爲單位的球面直角坐標。

在球面直角三角形 NP_1P 中, P 點的地理坐標 (B, l) 爲已知, P_1 點的經度爲零, 緯度 B_1 則是要推算的, 自三角學可得

$$\cos l = \frac{\tan(90^\circ - B_1)}{\tan(90^\circ - B)} = \frac{\tan B}{\tan B_1}. \quad (1)$$

將 $\cos l$ 展爲級數, 則

$$\cos l = 1 - \frac{1}{2}l^2 + \dots$$

$$\tan B_1 - \tan B = \frac{l^2}{2} \tan B_1,$$

但是

$$\begin{aligned} \tan B_1 - \tan B &= \frac{\sin(B_1 - B)}{\cos B_1 \cos B} \\ &= \frac{B_1 - B}{\cos B_1 \cos B} + \dots, \end{aligned}$$

所以

$$B_1 - B = \frac{l^2}{2} \sin B_1 \cos B.$$

即

$$\frac{X}{r} = B_1 = B + \frac{l^2}{2} \sin B \cos B, \quad (2)$$

因爲 B_1 與 B 相差極小, 故上式中 $\sin B_1$ 和 $\sin B$ 相差無幾。在以上的推演中, 我們只保留 l 的三次項, 四次項則棄去; 又 l 是以弧角爲單位。在實際計算中, l 以秒爲單位, 則應以 ρ'' 除,

$$\rho'' = 206265''. \quad (3)$$

其次,

$$\tan \frac{Y}{r} = \sin(90^\circ - B_1) \tan l,$$

將兩邊的正切展爲級數, 並以 $\cos B_1$ 代 $\sin(90^\circ - B_1)$, 得

$$\frac{Y}{r} + \frac{1}{3} \left(\frac{Y}{r} \right)^3 + \dots = \cos B_1 \left(l + \frac{1}{3} l^3 + \dots \right), \quad (4)$$

所以第一次近似爲

$$\frac{Y}{r} = \cos B_1 \cdot l,$$

故

$$\left(\frac{Y}{r} \right)^3 = l^3 \cos^3 B_1.$$

代入(4)式,得第二次近似:

$$\frac{Y}{r} = l \cos B_1 + \frac{1}{3} l^3 \sin^2 B_1 \cos^2 B_1 + \dots,$$

式中 B_1 為 P_1 點的緯度,為計算便利起見,必須將它變為 B 。自(2)式,

$$B_1 = B + \frac{l^2}{2} \sin B \cos B,$$

故

$$\cos B_1 = \cos B - \frac{l^2}{2} \sin^2 B \cos B - \dots, \quad (5)$$

所以

$$\frac{Y}{r} = l \cos B - \frac{1}{6} l^3 \sin^2 B \cos B. \quad (6)$$

在這個式中,保留 l^3 ,而捨去 l^4 。

現在我們利用球面直角坐標 $\left(\frac{X}{r}, \frac{Y}{r}\right)$ 來推求橫軸墨卡托投影的公式。自圖 1, 我們可以了解 $\frac{Y}{r}$ 是相當於我們的緯度,而 $\frac{X}{r}$ 則相當於經度。正軸墨卡托投影的坐標公式為

$$\left. \begin{aligned} x &= r, l', & l' \text{ 從任何假定的經線起算,} \\ y &= r \ln \tan\left(45^\circ + \frac{B'}{2}\right), \end{aligned} \right\} (7)$$

式中 r 為地球半徑, \ln 為自然對數, B, l 各為點的緯度及經度,這裏以 x 為主坐標軸,也就是橫軸。我們若令

$$\begin{aligned} l' &= \frac{X}{r}, \\ B' &= \frac{Y}{r}, \end{aligned}$$

則(6)式變為

$$\left. \begin{aligned} x &= X, \\ y &= r \ln \tan\left(45^\circ + \frac{Y}{2r}\right). \end{aligned} \right\} (8)$$

以(2)式代入(8)的第 1 式,得,

$$x - rB = r \frac{l^2}{2} \sin B \cos B,$$

式中 rB 為相當於已知點的緯度的經線長,我們若以 X_B 來代之,則

$$\alpha - X_B = r \frac{l^2}{2} \sin B \cos B. \quad (9)$$

現在再來討論(7)的第“2”式。我們知道

$$\tan\left(45^\circ + \frac{Y}{2r}\right) = \frac{1 + \tan \frac{Y}{2r}}{1 - \tan \frac{Y}{2r}},$$

所以

$$y = r \left\{ \ln \left(1 + \tan \frac{Y}{2r} \right) - \ln \left(1 - \tan \frac{Y}{2r} \right) \right\}.$$

但是

$$\begin{aligned} \ln \left(1 + \tan \frac{Y}{2r} \right) &= \tan \frac{Y}{2r} - \frac{1}{2} \tan^2 \frac{Y}{2r} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{Y}{2r} \cdots, \\ \ln \left(1 - \tan \frac{Y}{2r} \right) &= -\tan \frac{Y}{2r} - \frac{1}{2} \tan^2 \frac{Y}{2r} - \frac{1}{3} \tan^3 \frac{Y}{2r} \cdots, \end{aligned}$$

故

$$y = 2r \left(\tan \frac{Y}{2r} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{Y}{2r} + \cdots \right), \quad (10)$$

因爲自(6)式:

$$\begin{aligned} \frac{Y}{2r} &= \frac{1}{2} \left(l \cos B - \frac{1}{6} l^3 \cos B \sin^2 B \right), \\ \tan \frac{Y}{2r} &= \frac{Y}{2r} + \frac{1}{3} \left(\frac{Y}{2r} \right)^3 \\ &= \frac{1}{2} l \cos B - \frac{1}{12} l^3 \cos B \sin^2 B + \frac{1}{24} l^3 \cos^3 B, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\tan^3 \frac{Y}{2r} = \frac{1}{8} l^3 \cos^3 B. \quad (12)$$

將(11)及(12)代入(10)式, 則

$$y = r \left[l \cos B + \frac{1}{6} l^3 \cos^3 B (1 - t^2) \right], \quad (13)$$

式中 $t = \tan B_0$, $t = \tan B$.

(9) 和(13)就是橫軸墨卡托投影應用於正球面的坐標公式, 在這兩式中, 我們只保留至 γ^3 的三次項。

子午線收斂角 γ 則可推算如下: 自圖 1, 直角三角形 NP_1P 的 P 角等於 $(90 - \gamma)$,

故

$$\cos(90-\gamma) = \frac{\tan l \sin(90-B_1)}{\tan(90-B)},$$

故

$$\begin{aligned}\sin \gamma &= \tan l \cos B_1 \tan B \\ &= \tan l \sin B \frac{\cos B_1}{\cos B}.\end{aligned}$$

但

$$\tan l = l + \frac{1}{3} l^3 + \dots,$$

又自(5)式:

$$\frac{\cos B_1}{\cos B} = 1 - \frac{l^2}{2} \sin^2 B,$$

故

$$\sin \gamma = \left(l - \frac{1}{2} l^3 \sin^2 B + \frac{1}{3} l^3 \right) \sin B.$$

又因

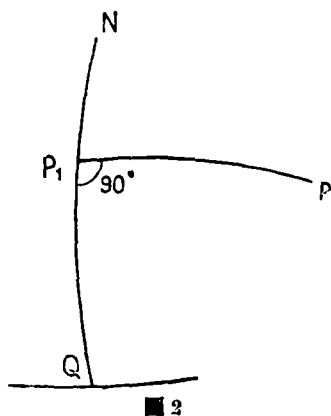
$$\sin \gamma = \gamma - \frac{1}{6} \gamma^3 + \dots,$$

故

$$\gamma = l \sin B + \frac{1}{3} l^3 \sin B \cos^2 B. \quad (14)$$

三. 橢球面上的橫軸墨卡托投影

設 NP_1Q 為中央經線, Q 為它和赤道的交點; P 為任何一點, 從 P 作一大地線



PP_1 與中央經線相垂直; 則和球面直角坐標相類似。我們可以以 QP_1 和 P_1P 為 P 點的坐標, 前者為縱標, 以 X 代表, 後者則為橫標, 以 Y 代表。這就是橢球面直角坐標, 是根據索爾特尼的定義而來的, 故又稱為索爾特尼橢球面直角坐標^[4]。

按照上節橫軸墨卡托投影的定義, 坐標公式為(8),

即

$$\left. \begin{aligned}x &= X \\ y &= r \ln \tan \left(45^\circ + \frac{Y}{2r} \right).\end{aligned} \right\} \quad (15)$$

這裏的 X 爲 QP_1 , 也就是從赤道至大地線 PP_1 的垂腳間的距離; r 則爲平均曲率半徑, 即 $r = \sqrt{MN}$; M 爲子午線方向曲率半徑; N 爲卯酉線方向曲率半徑。

橢球面直角坐標和地理坐標的關係如下^[5]:

$$B_1 - B = \frac{1}{2} V^2 t (l \cos B)^2 \left\{ 1 + \frac{(l \cos B)^2}{12} [5V^2 - t^2(1 + 9\eta^2)] \right. \\ \left. + \frac{t(61 - 58t^2 + t^4)}{720} (l \cos B)^6, \right. \quad (16)$$

$$\frac{Y}{N} = \cos B l \left\{ 1 - \frac{t^2 \cos^2 B}{6} l^2 - \frac{t^2}{120} (8V^2 - t^2) (l \cos B)^4 \right\}. \quad (17)$$

式中 $V^2 = 1 + \eta^2 = 1 + e^2 \cos^2 B$, $t = \tan B$, l 以弧度爲單位, 若以 l'' 代表以秒爲單位的 l , 則 $l = \frac{l''}{\rho''}$; 兩式中的 t, η^2, V^2 等皆屬於緯度 B , 即推算點 P 的緯度。

因爲(15)式中的 $r = \sqrt{MN}$,

故
$$r = \frac{N}{V}.$$

所以自(16)式得

$$\frac{Y}{2r} = \frac{Y}{2N} V \\ = V \left\{ \frac{1}{2} \cos B \cdot l - \frac{t^2 \cos^3 B}{12} \cdot l^3 - \frac{t^2}{240} (8 - t^2 + 8\eta^2) \cos^5 B \cdot l^5 \right\}.$$

因爲

$$t = \frac{\sin B}{\cos B},$$

故

$$\frac{Y}{2r} = V \left\{ \frac{1}{2} \cos B \cdot l - \frac{1}{12} \sin^2 B \cos B \cdot l^3 - \frac{1}{240} (8 - t^2 + 8\eta^2) \sin^2 B \cos^3 B \cdot l^5 \right\}.$$

又因

$$\tan \frac{Y}{2r} = \frac{Y}{2r} + \frac{1}{3} \left(\frac{Y}{2r} \right)^3 + \frac{2}{15} \left(\frac{Y}{2r} \right)^5 + \dots,$$

故

$$\tan \frac{Y}{2r} = V \left\{ \frac{1}{2} \cos B \cdot l - \frac{1}{12} \sin^2 B \cos B \cdot l^3 - \frac{1}{240} (8 - t^2 + 8\eta^2) \sin^2 B \cos^3 B \cdot l^5 + \right. \\ \left. + \frac{1}{24} (1 + \eta^2) \cos^3 B \cdot l^3 - \frac{1}{48} (1 + \eta^2) \sin^2 B \cos^3 B \cdot l^5 \right\}$$

$$+ \frac{1}{240} (1 + \eta^2)^2 \cos^5 B \cdot l^5 \Big\},$$

即

$$\begin{aligned} \tan \frac{Y}{2r} = V \Big\{ \frac{1}{2} \cos B \cdot l + \frac{1}{24} (1 - 2l^2 + \eta^2) \cos^3 B \cdot l^3 \\ + \frac{1}{240} (1 - 13l^2 + l^4) \cos^5 B \cdot l^5 \Big\}. \end{aligned} \quad (18)$$

在(18)式中, 我們只保留 l 的五次項, 但由於此級數只有單次項, 故事實上此級數是準確至 l 的六次項, 而在五次項中, 我們將包括 η^2 及 η^4 的各項捨去。

自(15)的第2式,

$$y = r \ln \tan \left(45^\circ + \frac{Y}{2r} \right).$$

與前節相同, 此式可寫成

$$\begin{aligned} y = r \left\{ \ln \left(1 + \tan \frac{Y}{2r} \right) - \ln \left(1 - \tan \frac{Y}{2r} \right) \right\} \\ = 2r \left(\tan \frac{Y}{2r} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{Y}{2r} + \frac{1}{5} \tan^5 \frac{Y}{2r} + \dots \right). \end{aligned} \quad (19)$$

以(18)代入(19), 注意 $r = \frac{N}{V}$

$$\begin{aligned} y = 2N \Big\{ \frac{1}{2} \cos B \cdot l + \frac{1}{24} (1 - 2l^2 + \eta^2) \cos^3 B \cdot l^3 + \frac{1}{240} (1 - 13l^2 + l^4) \cos^5 B \cdot l^5 + \\ + \frac{1}{24} (1 + \eta^2) \cos^3 B \cdot l^3 + \frac{1}{96} \cos^5 B \cdot l^5 + \\ + \frac{1}{160} \cos^5 B \cdot l^5 \Big\}, \end{aligned}$$

即

$$y = N \cos B \cdot l + \frac{N}{6} (1 - l^2 + \eta^2) \cos^3 B \cdot l^3 + \frac{N}{120} (5 - 13l^2 + l^4) \cos^5 B \cdot l^5. \quad (20)$$

此式與高斯-克呂格投影準確至同一等級的公式完全相同^[6,7]。

現在再進而求 x 與 l 及 B 的關係。根據定義, X_1 為自赤道至大地線 PP_1 的垂腳 P_1 的經線長, 故

$$X = X_0 + \int_{B=B}^{B_1} M dB,$$

但是

$$\int_{B=B}^{B_1} M dB = M \Delta B + \frac{3}{2} \frac{M}{V^2} \eta^2 t \Delta B^2 + \frac{M}{2V^4} \eta^2 (1-t^2) \Delta B^3 + \dots,$$

式中^[8] $\Delta B = B_1 - B$, 各係數皆屬於緯度 B 。

根據(16)式:

$$\begin{aligned} \Delta B = B_1 - B &= \frac{1}{2} V^2 \sin B \cos B \cdot l^2 + \frac{V^2}{24} (5 - t^2 + 5\eta^2 - 9\eta^2 t^2) \sin B \cos^3 B \cdot l^4 \\ &\quad + \frac{V^2}{1440} (61 - 58t^2 + t^4) \sin B \cos^5 B \cdot l^6, \\ t \Delta B^2 &= \frac{1}{4} V^2 t^2 \sin B \cos^3 B \cdot l^4 + (\eta^2 \text{ 與 } l^6 \text{ 的乘積}). \end{aligned}$$

注意 $M = N/V^2$, 得

$$\begin{aligned} \int_{B=B}^{B_1} M dB &= \frac{N}{2} \sin B \cos B \cdot l^2 + \frac{N}{24} \sin B \cos^3 B (5 - t^2 + 5\eta^2) \cdot l^4 + \\ &\quad + \frac{N}{720} \sin B \cos^5 B (61 - 58t^2 + t^4) l^6. \end{aligned} \quad (22)$$

代入(21)式, 即得縱坐標 x , 此式與高斯-克呂格投影相當等級的縱坐標相差一個 $l^4 \times \eta^2$ 等級的一項, 即

$$\Delta X = \frac{N}{6} \sin B \cos^3 B \eta^2 (1 + \eta^2) \cdot l^4.$$

(以高斯-克呂格投影的縱坐標減橫軸橢球墨卡托投影的縱坐標)。此式適等於高斯子午線收斂角與橢球子午線收斂角差數和 Y 相乘的四分之一。收斂角差數為^[9]

$$\gamma - \gamma^1 = \frac{2}{3} \eta^2 \sin B \cos^2 B (1 + \eta^2) l^2,$$

故與 $Y = l \cos B + \dots$ 相乘, 適為 ΔX 的四倍。

現在我們討論一下這個問題: 設圖 3 的左圖表示橢球面, P 為計算點, $P_0 P$ 為通過 P 的緯線, $P_0 N$ 為中央經線, PP_1 為從 P 所作垂直於中央經線的大地線, 所以 P_1 角

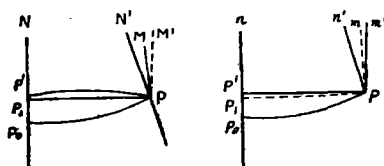


圖 3

為直角, PN^1 為通過 P 點的經線, MP 為中央經線的平行線, 所以在橢球面上, 子午線收斂角為 $N'PM$ 。以右圖代表左圖的投影, 以相當的小寫

字母代替各點的投影, 即 p 為計算點, $p_0 p$ 為緯線,

$p_0 n$ 為中央經線, 即為縱軸; pp_1 為大地線 $p_1 p$, 而

mp 為中央經線平行線 MP 的投影。我們知道 mp 並不平行於 $p_0 n$, 而 pp_1 則為一曲

線,在 p_1 點上是垂直於 p_0n 的,同時,在 p 點上則垂直於 pm 。現在若自 p 作 p_0n 的平行線,則它必不與 mp 相合,也就是說,它不是 MP 的投影,而是橢球面上另一條曲線 $M'P$ 的投影;此線與 MP 相差一個微角,即前文所提到的 $\gamma-\gamma^1$ 。同樣,假如我們自 p 點作一垂線至中央經線,則交點 p' 必不與 p_1 相合,而是略微在這點之上。這條垂線是橢球面上曲線 PP' 的投影,由於正形的關係,曲線 PP' 和 P_0N 也在交點上相垂直。

由此可見, P_1 和 P' (或 P_1 和 P')並非一點,而是兩個點子,高斯-克呂格投影的縱坐標是從赤道至 P' (也就是到 p')的經線長,但此處所討論的橫軸墨卡托投影的

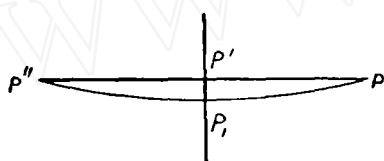


圖 4

縱坐標則為從赤道至 P_1 的經線長,兩者相差一個距離等於 $P'P_1$ 或 $p'p_1$ 。現在, pp_1 是大地線 PP_1 的投影,我們若將它向中央經線以西延長與 p 點的橫坐標線相交於 p'' ,則 p'' 必與 p 點對於中央經線成對稱,也就是 p' 為 pp'' 的中點(圖4)。

大地線投影的方程可從克呂格論文中得到^[10]。自§37,公式(10),將所用符號略加改變,即以 ξ 代該式中的新縱坐標 y ,以免與橢球面上的 $r_1^2=e'^2\cos^2B$ 相混。又以 ΔX 和 Δy 代替德文的 X 和 y 的花體, y_m 代 $y'm$, ρ 代 ρ_m ,以及以 e_m^2 的相當值 $\frac{\eta^2 t}{V^2}$ 代替等等,則

$$\frac{\xi}{r} = \frac{1}{8} \left[1 - 4 \left(\frac{\xi}{r} \right)^2 \right] \left\{ C_0 + C_1 \frac{\xi}{r} + C_2 \left(\frac{\xi}{r} \right)^2 + \dots \right\}. \quad (23)$$

式中 ξ 與 r 為大地線投影上任何一點的坐標(圖5),橫坐標軸為聯系兩端點(如圖5的A和B)的弦,以中點O為起點, ξ 軸則為從O所作垂直於 ξ 軸的直線; r 為弦長,即等於 AB ; C_0, C_1, C_2 等為係數,若令A和B點的坐標各為 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) ,又令 $\Delta X = X_2 - X_1, \Delta y = y_2 - y_1, y_m = \frac{1}{2}(y_2 + y_1)$,則

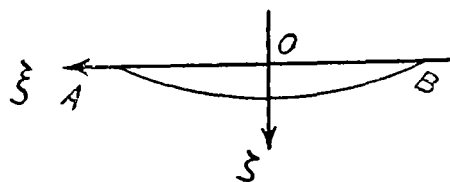


圖 5

$$\begin{aligned} C_0 = & \frac{\Delta X}{\rho} \left\{ \frac{y_m}{\rho} - \frac{1}{3} (1 - 2\eta^2) \left(\frac{y_m}{\rho} \right)^3 + \frac{2}{15} \left(\frac{y_m}{\rho} \right)^5 + \right. \\ & + \frac{1}{48} \frac{y_m}{\rho} \left[5 \left(\frac{\Delta X}{\rho} \right)^2 - \left(\frac{\Delta y}{\rho} \right)^2 \right] \left. \right\} \\ & + \frac{\eta^2 t}{V} \frac{\Delta y}{\rho} \left\{ 2 \left(\frac{y_m}{\rho} \right)^2 - \frac{1}{12} \left[2 \left(\frac{\Delta X}{\rho} \right)^2 - \left(\frac{\Delta y}{\rho} \right)^2 \right] \right\}, \end{aligned}$$

以及 C_1, C_2 等等 (由於在我們所討論的問題中, $\xi=0$, 故此等係數從略), 式中 ρ 為橢球面上相當於中點 O 的平均曲率半徑。

對於我們的問題來說, p 和 p'' 的縱坐標相等, 即 $\Delta X=0$, p 和 p'' 的橫坐標各為 $+y$ 和 $-y$, 故 $\Delta y=2y$, $y_m=0$, 所以

$$C_0 = -\frac{\eta^2 t}{V} \times \frac{2}{3} \left(\frac{y}{\rho} \right)^3. \quad (24)$$

我們現在是要推算大地線投影在中點上的偏出量, 即 $p'p_1$ (圖 4)。在此情形下, $\xi=0$, 故 (23) 式右邊第二括弧內除 C_0 項外餘皆等於零, 而第一括弧內的第二項亦為零。以 (24) 代入 (23) 式, 得

$$\frac{\zeta}{r} = \frac{1}{12} \frac{\eta^2 t}{V} \left(\frac{y}{\rho} \right)^3,$$

但是

$$r = 2y, \quad (\text{弦的全長})$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{NM}} = \frac{V}{N},$$

故

$$\zeta = \frac{1}{6} \eta^2 (1 + \eta^2) t \frac{y^4}{N^3}.$$

以公式 (20) 的第一項代入, 得

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{N}{6} \eta^2 (1 + \eta^2) t \cos^4 B \cdot l^4 \\ &= \frac{N}{6} \eta^2 (1 + \eta^2) \sin B \cos^3 B \cdot l^4. \end{aligned}$$

我們如果以 ζ 加入 (22) 式, 則其結果高斯-克呂格投影的縱坐標公式無異。

高斯-克呂格投影為應用於大地測量上主要投影的一種, 它比我國過去所採用的蘭勃脫投影為優。因為後者是按緯線分帶的, 所以在離中央子午線較遠之處經線輻合甚大, 在我國的東北或新疆西部, 經線與坐標格線的傾角可達 15° 以上, 用者很感不便。高斯-克呂格投影則由於它是按經線分帶的, 所以無此弊。最大的傾角皆在 3° 以下, 在中國地區則一般在 2° 以內。此外, 高斯-克呂格投影的計算公式亦遠較蘭勃脫投影為便利。蘇聯很早就規定了將 6° 分帶的高斯-克呂格投影應用於大地測量及大比例尺製圖之上。我國也已採用了它為全國測量上的投影, 很多投影表已經計算並已部分出版。但是還有一部分人將它和橫軸墨卡托投影混為一談。從以上的結論中可以看出它們是十分接近的, 但不是同一投影。

參 考 文 獻

- [1] 方俊, 1952. 地圖投影學. 99頁及217頁.
- [2] O. Eggert, 1936. Die stereographische Abbildung des Ellipsoids, Zeits. f. Vermess. 153頁.
- [3] M. H. Roussilhe, Emploi des coordonnées rectangulaires stéréographiques pour le calcul de la triangulation dans un rayon de 560 km. autour de l'origine, Travaux de la Section de géodésie de l'Union Géodésique et géophysique internationale, Tome I.
- [4] Красовский, Ф. Н., 1942. Руководство по высшей геодезии. Ч. II, 19頁.
- [5] ———, 1942. 同上書, Ч. II, 182頁, 公式(381);及183頁, 公式(383).
- [6] ———, 1942. 同上書, 196頁, 公式(400).
- [7] Jordan-Eggert, 1948. Handbuch der Vermessungskunde, Bd. III/2, 152頁, 公式(16).
- [8] ———, 1948. 同上書, Bd. III/1, 269頁, 公式(39).
- [9] Красовский, Ч. II, 202頁, 公式(421).
- [10] Krüger, L., 1912. Grundformeln für die konforme Abbildung des Ellipsoids in der Ebene.