第 62 卷 第 8 期
2007 年 8 月

地 理 学 报
ACTA GEOGRAPHICA SINICA

Vol.62, No.8
Aug., 2007

旅行分布的重力模式与交通模型的关系

梁进社[1], 贺灿飞[2], 张 华[1]

(1. 北京师范大学地理学与遥感科学学院，北京 100875；
2. 北京大学城市与区域规划系，北京 100871)

摘要：从交通问题的对偶规划出发，引入由 Beckmann 和 Wallance，Golob 和 Beckman 等提出的不确定性效用方法，建立交通问题和双约束重力模型的关系。证明当旅行者效用概率分布密度函数的标准差趋于零时，双约束重力模型中的距离摩擦系数趋于正无穷，由双约束重力模型确定的旅行分布使得总的交通成本达到最小。在这种关系中，双约束重力模型中平衡因子的作用是市场调整旅行终点服务价格进而调整旅行者消费者剩余的结果。通过建立的分析方法对北京、上海、广州、西安、武汉、成都和昆明等七个城市间航空交通的应用，发现多数航线的模拟较好。结果表明各终点的差异性、消费者偏好的不同、交通工具的替代性和旅行目的之差异性等可以导致一些较大的误差，这些差异性可以采用对起终点对的单位交通费用的调整来体现，从而达到较好的模拟和分析效果。

关键词：交通问题；双约束重力模型；对偶规划；平衡因子；旅行成本调整

1 引言

有两种模式可以用于分析和规划交通流的地理分布：其一是由 Hitchcook 提出，并由他先于一般线性规划概念数年解决的交通模型[1]，其二为重力模型。交通模型和重力模式都有着广泛的用途[2-4]，本文的注意力集中于旅行的地理分布方面。重力模型中的双约束模型[5-7]，其产生和接受量、各个起讫点对之间的交通成本均为已知，与交通模型有着完全相同的前提，但如何推算出起讫点对之间的旅客交通量，重力模式和交通模型由于对旅行者的行为假设不同，而产生出有较大差别的旅行分布估计。

Evans 曾证明了随着重力模式中的距离摩擦系数 (即 β) 趋于正无穷，交通总成本将趋于它的最小值；当 β 趋于负无穷时，交通总成本将趋于它的最大值[8]。这的确是一个漂亮的结果。然而，在 Evans 的论证中，β 是一个权重因子，表明交通总成本与相应旅行分布发生的可能性的相对重要性。我们不禁要问 β 的微观基础是什么，即从旅行者的角度来看权重 β 是怎样起作用的？围绕重力模式的理论推导出现了大量的文献。Sen 和 Smith 将这些文献分为确定性的理论 (主要依据经济学中的效用理论) 方法和不确定性的理论 (即概率论) 方法[3]。其中 Beckmann 和 Wallance，Golob 和 Beckman 的工作是较完善的效用理论方法的代表[9-11]，而 Wilson 的熵原理是较完善的概率论方法的代表[6]。不过，这些理论方法主要关心推导重力模式的形式，对其中的平衡因子 (即 A_i 和 B_j) 也主要关心其形式，而对其现实意义是什么，通过什么机制进行调整缺少研究。显然，β 的微观基础、平衡因子的意义和调整机制的探究，对将运输模型与重力模型从理论和现实应用上联系起来，对人类空间互动行为的理解和解释都具有重要的意义。本文正是希望从线性规划的对偶途径出发，获得对上述问题的一些解释。另外，Evans 的方法比较复杂，我们将会看到，从对偶规划的角度证明却十分简单。

本文首先从个体的确定性效用理论和运输模型的对偶规划角度建立旅行分布的交通模型，然后在此基础上引入由 Beckmann 和 Wallance，Golob 和 Beckman 等提出的不确定

收稿日期：2007-01-18；修订日期：2007-04-29
基金项目：国家自然科学基金项目(40635026) [**Foundation:** National Natural Science Foundation of China, No.40635026]
作者简介：梁进社 (1957-), 男, 教授, 主要从事经济地理学、自然资源与环境经济学的教学和研究。
E-mail: liangjs@bnu.edu.cn

性效用方法[9-11]，这不但能建立交通问题和重力模式的关系，从中推导出重力模型，而且能给 β 与平衡因子一些实际的意义和平衡因子如何作用一些合理的解释。然后，通过一个案例应用研究说明前一部分建立的模型的应用，并进一步引申模型的意义。

2　重力模式与交通模型关系的推导

2.1　旅行分布线性规划的一个新表述

设有 m 个旅行出发点，n 个旅行终达点。各个发点的出行数已知，分别为 O_1，O_2，…，O_m。各个终点的旅行到达数也已知，分别为 D_1，D_2，…，D_n。同时有：

$$\sum_i O_i = \sum_j D_j = W \tag{1}$$

即旅行的总出发数与总到达数是相等的。这些旅行者使用同一种交通工具，从第 i 个出发点到第 j 个终达点的单位旅客交通成本 (或交通距离) 已知，为 c_{ij} ($i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n$)。设 T_{ij} ($i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n$) 表示从第 i 个出发点到第 j 个终达点的旅行数，为未知，显然他们必须满足如下条件：

$$\sum_{j=1}^{n} T_{ij} = O_i \qquad i = 1, 2, \cdots, m \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} T_{ij} = D_j \qquad j = 1, 2, \cdots, n \tag{3}$$

分别被称为流出约束和流入约束。当然这里还要求 $T_{ij} \geq 0$，即所谓的非负条件。

交通模型假设旅行分布应使总的交通成本达到最小，即使下式：

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}T_{ij} \tag{4}$$

达到最小的 T_{ij}。

现在从确定性效用理论和对偶规划角度建立旅行分布的线性规划模型。假设每个旅行者在各个终点获得的效用相同，用 u (货币单位) 表示。这与熵模式[5, 6]假设的“等可能性”一致。在第 j 个目的地每一个旅行者的花费 (也称终点服务价格) 是相同的，为 p_j。第 i 个出发地的旅行者到第 j 个目的地旅行获得的净效用 (也称为消费者剩余) v_{ij} 为：

$$v_{ij} = u - p_j - c_{ij} \qquad i = 1, 2, \cdots, m; \qquad j = 1, 2, \cdots, n \tag{5}$$

第 i 个出发地的旅行者应该到能获得最大净效用 (用 v_i 表示) 的地方去旅行，即：

$$v_i = \underset{j}{Max}\,(u - p_j - c_{ij}) = \{v_{ij_1}, v_{ij_2}, ..., v_{ij_{k_i}}\} \qquad i = 1, 2, \cdots, m \tag{6}$$

$$T_{ij} \geq 0 \text{ 当 } j = j_1, j_2, ..., j_{k_i} \text{时} \tag{7}$$

$$T_{ij} = 0 \text{ 当 } j \neq j_1, j_2, ..., j_{k_i} \text{时。} \tag{8}$$

由于旅行者在出发点选择目的地，(6)~(8) 式暗示约束条件式 (2) 总能够得到满足，但约束条件式 (3) 却不一定。显然，到达人数小于给定人数的终点应降低其服务价格，大于给定人数的终点应提高其服务价格。从新古典经济学来看，一定存在一组终点服务价格，使得从各出发点到达各终点的旅行人数之和恰好等于已知的各终点的到达总数，使 (3) 式成立。关于交通模式的对偶解法证明了这一点[12-14]。另外应注意到，如果给每一个旅行终点的终点服务价格增加 (或减少) 一个相同的数量，旅行分布不变，所以本文强调 p_j 是一组相对价格。

(6) 式意味着：

$$v_i \geq u - p_j - c_{ij} \text{ 或者 } v_i + p_j \geq u - c_{ij} \qquad i = 1, 2, \cdots, m; \qquad j = 1, 2, \cdots, n \tag{9}$$

(6)~(8) 式意味着：

$$(v_i + p_j + c_{ij} - u)T_{ij} = 0 \qquad i = 1, 2, \cdots, m; \qquad j = 1, 2, \cdots, n \tag{10}$$

考虑下面一对线性规划：其一是

$$\underset{T_{ij}}{Max}\,(uW - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}T_{ij}) \tag{11}$$

约束条件为 (2)、(3) 式和非负条件。另一是

$$Min\left(\sum_{i=1}^{m} v_i O_i + \sum_{j=1}^{n} p_j D_j\right) \tag{12}$$

约束条件为 (9) 式。线性规划的对偶定理表明，(10) 式是 (11) 式与 (2) 式、(3) 式、非负条件等四式构成的线性规划和 (12) 式与 (9) 式等二式组成的线性规划均达到最优解的必要且充分的条件[2, 12, 14, 15]，并且这两个规划的最优值相等。

这一对规划将旅行这一事件的总价值 (uW) 分成三部分：一部分分配给旅客交通这一环节，一部分分配给各个旅行终点，还有一部分就是旅行者的净效用，或消费者剩余。(11) 式是说如何进行交通优化才能将所有旅行者去各个终点获取的总效用减去交通费用之后的净值达到最大。由于 uW 是一定值，(11) 式最大意味着 (4) 式最小，故 (11)式和 (4) 式的解是一致的。(12) 式与 (9) 式所构成的线性规划是说，当旅行者希望消费者剩余与各终点服务价格之和不小于旅行者在各终点获取的总效用减去交通费用之后的净值 (从 (9) 式来看是十分清楚的) 时，市场机制只能使总的消费者剩余和所有终点的总旅行花费达到最小 (对旅行者来说，终点服务价格是成本或费用，而对终点城市来说是收入，所以本文有时用终点花费或成本，有时用收入)。对偶定理 (即 (10) 式) 表明，当且仅当旅行分布使得旅行价值恰好等于各起终点对的消费者剩余、终点服务价格与它们之间的交通成本时，所有旅行者去各个终点获取的总效用减去总交通费用之后的净值达到最大，总的消费者剩余与在所有终点的总旅行花费之和达到最小，同时二者相等。

2.2 引入不确定性效用方法建立重力模型与交通模型的关系

双约束重力模型的基本形式为：

$$T_{ij} = A_i B_j O_i D_j f(c_{ij}) \tag{13}$$

式中：f 是 c_{ij} 的递降函数，A_i、B_j 是两个平衡因子：

$$A_i = \left(\sum_{j=1}^{n} B_j D_j f(c_{ij})\right)^{-1} \tag{14}$$

$$B_j = \left(\sum_{i=1}^{m} A_i O_i f(c_{ij})\right)^{-1} \tag{15}$$

一般来说，f 取幂函数或指数函数两种形式，即

$$f(c_{ij}) = c_{ij}^{-\rho} \tag{16}$$

$$\text{或 } f(c_{ij}) = \exp(-\beta c_{ij}) \tag{17}$$

式中：ρ 和 β 为两个正参数。

随机效用的概念是以人们进行重复选择和消费者的不均匀性为基础的，它被广泛地应用于交通研究中[9-11, 16-18]。本文遵从由 Beckmann 和 Wallance，Golob 和 Beckman 等提出的不确定性效用途径[9-11]。假设旅行效用或旅行价值 (u) 是一随机变量，它起因于旅行者内心的重复权衡。u 的概率分布密度函数为 $f(x)$，即：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)du = 1 \tag{18}$$

按照前面的分析，旅行者应到能获取最大消费者剩余的地方去旅行，这就是依照 (11) 式或 (9) 式和 (7)、(8) 式，以及 (2) 式、(3) 式确定旅行分布。现在，旅行效用或旅行价值是一随机变量，从 (9) 式可以假设，当消费者剩余 (即 v_i) 大于某一个值时，旅行区位选择即可确定。由于在均衡处：当 $T_{ij} > 0$ 时，必有 $u = v_i + p_j + c_{ij}$，所以要求 v_i 大于某一个值，等价于要求 u 大于某一个值。所以不难想象：

$$F(v_i, p_j, c_{ij}) = \int_u^{+\infty} f(x)dx = \int_{v_i+p_j+c_{ij}}^{+\infty} f(x)dx \tag{19}$$

表示一个人从第 i 个发点到第 j 个终点去旅行的可能性 (或概率)，而

$$T_{ij} = O_i F(v_i, p_j, c_{ij}) = \mathrm{O}_i \int_{v_i+p_j+c_{ij}}^{+\infty} f(x)dx \quad i = 1, 2, \cdots, m; \quad j = 1, 2, \cdots, n \tag{20}$$

表示从第 i 个发点到第 j 个终点去旅行的期望值人数。将上式分别代入 (2) 式和 (3) 式得：

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{v_i+p_j+c_{ij}}^{+\infty} f(x) = 1 \quad i = 1, 2, \cdots, m \tag{21}$$

$$\sum_{i=1}^{m} O_i \int_{v_i+p_j+c_{ij}}^{+\infty} f(x)dx = D_j \quad j = 1, 2, \cdots, n \tag{22}$$

显然 v_i 和 p_j 是平衡因子，它们分别代表消费者剩余和各终点的服务价格。如果像 Golob 和 Beckman 一样，假设 $f(x)$ 为正态分布，并用 Logistic 函数近似正态分布[9, 10]，那么：

$$F(v_i, p_j, c_{ij}) = \left[1 + \mathrm{e}^{\gamma(v_i+p_j+c_{ij}-\mu)/\sigma}\right]^{-1} \approx a_i b_j \mathrm{e}^{-\beta c_{ij}} \quad i = 1, 2, \cdots, m; \quad j = 1, 2, \cdots, n \tag{23}$$

$$T_{ij} = O_i F(v_i, p_j, c_{ij}) \approx O_i a_i b_j \mathrm{e}^{-\beta c_{ij}} \quad i = 1, 2, \cdots, m; \quad j = 1, 2, \cdots, n \tag{24}$$

当 (23) 式中括弧里的第二项占据统治地位时，可忽略第一项，其中：

$$a_i = e^{\beta(\mu - v_i)} \quad i = 1, 2, \cdots, m \tag{25}$$

$$b_j = e^{-\beta p_j} \quad j = 1, 2, \cdots, n \tag{26}$$

$$\beta = \frac{\gamma}{\sigma} \tag{27}$$

式中：γ 是一个适当的用 Logistic 近似正态分布的参数，大约为 1.6。μ 和 σ 分别为正态分布的均值和标准差。

显然，(23) 式是典型的指数型重力模型。现在可以清楚地看到，当 σ 趋于零时 β 趋于正无穷，交通总成本趋于它的最小值，这正是 Evans 曾证明了的。但在这里 β 趋于负无穷无意义。σ 趋于零，说明旅行者对目的地的评价越趋于确定性。其结果是，旅行分布使得总的交通成本达到最小。将 (23) 式分别代入 (21) 式和 (22) 式得到：

$$a_i = \left[\sum_{j=1}^{n} b_j e^{-\beta c_{ij}}\right]^{-1} \quad i = 1, 2, \cdots, m \tag{28}$$

$$b_j = D_j \left[\sum_{i=1}^{m} a_i O_i e^{-\beta c_{ij}}\right]^{-1} \quad j = 1, 2, \cdots, n \tag{29}$$

从 (25)、(26)、(28)、(29) 式不难看出，a_i、b_j 的平衡作用通过终点服务价格和旅客的相互作用来调整，这正是我们想要知道的。

很容易从 (19)~(22) 式说明当概率密度函数 $f(x)$ 标准差 σ 趋于零时，由它们确定的旅行分布趋于使得总的交通成本达到最小的旅行分布。当 σ 趋于零时，旅行效用趋于确定性的值。从 (18) 可知，这时 u 值趋于一个单一的定值。由 (19)~(22) 出的 v_i、p_j，对于每一个 i 来说至少存在一对这样的 v_i、p_j，使得 $(v_i + p_j + c_{ij})$ 趋于 u 的极限值。否则，对于每一个 i，(19) 式趋于零，进而 (21) 式的左边均为零，故 (21) 式不可能成立。同时，不趋于 u 的极限值的 $(v_i + p_j + c_{ij})$ 对应的 T_{ij} 必然趋于零，因为，这时这一对起终点对应的 (19) 式的值必将趋于零。所以，下面的关系式必然成立：

$$\lim_{\sigma \to 0} (v_i + p_j + c_{ij} - u) T_{ij} = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, m; \quad j = 1, 2, \cdots, n \tag{30}$$

综上所述，当 σ 趋于零，即 u 趋于一个单一的定值时，由 (19)~(22) 四式决定的 v_i、p_j 和旅行分布 T_{ij} 必然趋于由 (2) 式、(3) 式、(11) 式以及非负条件共同决定的某一组旅行分布 T_{ij}，同时它们还满足 (10) 式：这个使总的交通成本达到最小的必要且充分的条件。

3 案例研究

本文的例证是针对中国的北京、上海和广州等七个大城市在 2003 年的城市间航空线上旅客分布的情形。之所以仅选择这七个城市是由于数据所限，多增任何一个城市都不可能产生完整的起终点对旅行分布矩阵。国内的相关研究主要针对全国的、甚至延伸到与海外联系的航空网络，分析中国城市间的相互作用[19]，透视中国城市体系可能发生的变化[20]。本部分的目的是用一个例证说明上一部分建立的双约束重力模型的应用，挖掘模型的分析和模拟潜力。这七个城市的案例研究能够说明我们想表达的主要方面。

表 1 在飞行时间、已知人数栏中分别给出了从各城市 (各行上的城市) 到其他城市

表 1 2003 年七城市间的航空交通资料和模拟情况

Tab. 1 Actual and simulated trip distribution on airlines between seven cities in China in 2003

起终点		北京	上海	广州	西安	武汉	成都	昆明	流出量	$v_i-\mu$ (修订前)	$v_i-\mu$ (修订后)
北京	飞行时间	0	110 (108)	165 (175)	100 (114)	120 (144)	150 (156)	220 (159)	3408340	79.8	109.2
	已知量	0	1281937.5	711797.5	326833.5	213057	504516.5	370198			
	模拟量 (1)	0.0	1257669.4	763422.4	362224.3	253384.5	524503.2	233470.5			
	模拟量 (2)	0.0	1261319.7	719087.9	322687.3	219055.5	510006.2	376095.4			
	相对误差 (1)	0.00	0.02	0.07	0.11	0.19	0.04	0.37			
	相对误差 (2)	0.00	0.02	0.01	0.01	0.03	0.01	0.02			
上海	飞行时间	110 (108)	0	115 (109)	110 (120)	70 (33)	135 (136)	160 (267)	2705255.5	129.9	166.1
	已知量	1281937.5	0	606196.5	161811	253322	302781.5	99207			
	模拟量 (1)	1264246.8	0.0	581920.9	176053.3	193143.1	307499.8	191824.1			
	模拟量 (2)	1261364.3	0.0	605715.8	170223.3	247213.5	318572.5	102234.6			
	相对误差 (1)	0.01	0.00	0.04	0.09	0.24	0.02	0.93			
	相对误差 (2)	0.02	0.00	0.00	0.05	0.02	0.05	0.03			
广州	飞行时间	165 (175)	115 (109)	0	135 (102)	100 (73)	115 (111)	135(172)	2158724	113.4	150.8
	已知量	711797.5	606196.5	0	170277.5	172659	337256	160537.5			
	模拟量 (1)	765897.7	580770.4	0.0	133567.1	141139.4	326944.8	211747.7			
	模拟量 (2)	719100.6	605705.1	0.0	168622.6	167973.2	330267.3	167054.9			
	相对误差 (1)	0.08	0.04	0.00	0.22	0.18	0.03	0.32			
	相对误差 (2)	0.01	0.00	0.00	0.01	0.03	0.02	0.04			
西安	飞行时间	100 (114)	110 (120)	135 (102)	0	70(101)	80 (70)	105 (82)	924455.5	163.9	204.6
	已知量	326833.5	161811	170277.5	0	40753.5	133412.5	91367.5			
	模拟量 (1)	363655.8	175829.5	133661.5	0.0	51542.5	123959.0	77327.9			
	模拟量 (2)	322694.5	170221.1	168623.4	0.0	42267.1	130139.5	90516.0			
	相对误差 (1)	0.11	0.09	0.22	0.00	0.26	0.07	0.15			
	相对误差 (2)	0.01	0.05	0.01	0.00	0.04	0.02	0.01			
武汉	飞行时间	120 (144)	70 (33)	100 (73)	70(101)	0	100 (124)	120(223)	781958	170.3	208.5
	已知量	213057	253322	172659	40753.5	0	72158	30008.5			
	模拟量 (1)	254155.7	192723.0	141111.4	51495.9	0.0	86633.8	56108.9			
	模拟量 (2)	219058.8	247208.5	167972.8	42266.8	0.0	75583.7	29864.2			
	相对误差 (1)	0.19	0.24	0.18	0.26	0.00	0.20	0.87			
	相对误差 (2)	0.03	0.02	0.03	0.04	0.00	0.05	0.00			
成都	飞行时间	150 (156)	135 (136)	115 (111)	80 (70)	100 (124)	0	60 (49)	1597507	138.2	176.3
	已知量	504516.5	302781.5	337256	133412.5	72158	0	247382.5			
	模拟量 (1)	526352.5	306978.6	327037.2	123906.4	86675.4	0.0	228221.8			
	模拟量 (2)	510015.9	318567.4	330267.8	130139.1	75584.1	0.0	232935.8			
	相对误差 (1)	0.04	0.01	0.03	0.07	0.20	0.00	0.08			
	相对误差 (2)	0.01	0.05	0.02	0.02	0.05	0.00	0.06			
昆明	飞行时间	220 (159)	160 (267)	135 (172)	105 (82)	120 (223)	60 (49)	0	998701	114.7	147.9
	已知量	370198	99207	160537.5	91367.5	30008.5	247382.5	0			
	模拟量 (1)	234031.5	191284.6	211570.5	77208.6	56073.0	227966.4	0.0			
	模拟量 (2)	376105.8	102233.8	167056.5	90516.5	29864.6	232937.8	0.0			
	相对误差 (1)	0.37	0.93	0.32	0.15	0.87	0.08	0.00			
	相对误差 (2)	0.02	0.03	0.04	0.01	0.00	0.06	0.00			
流入量		3408340	2705255.5	2158724	924455.5	781958	1597507	998701			
P (对应于修订前)		-139.6	-55.0	-42.6	121.5	149.6	22.4	60.8			

说明：人数单位为“个”；飞行时间为“分”，其中括号内表示调整的飞行时间

(各列上的城市)的这些相应数据。飞行时间取各航班的中间值，起终点对的旅行人数是 2004 年《中国交通统计年鉴》中相应城市间航空交通人数的平均数 (即一半)，所以，这两组数据的分布具有对称性。表 1 给出的上述两组数据也确定了各城市的航空旅客出行总量、到达总量和以飞行时间表示的两城市间的交通成本。将双约束力模型应用于这种情形，其一就是等价于利用上述资料模拟这七个城市间的航空旅行人数分布。

其模型的运作程序如下：第一步：利用 (4) 式计算已经发生的总交通成本，这个总交通成本以人·分钟计量 (记作 C_0)。这时 (4) 式中的 c_{ij} ($i, j = 1,2,\cdots,7$) 为两城市间的飞行时间，T_{ij} 为已知的旅客交通量。第二步：给 β 一个初始值，根据 (27) 式，由于 γ 一般为 1.6，这等价于确定了正态分布的标准方差 σ。第三步：根据 (28) 式和 (29) 式，用传统的迭代法计算 a_i 和 b_j ($i, j = 1, 2, \cdots, 7$) 的值[21]。首先任意给 a_i 一组值，然后根据 (29) 式计算 b_j，接下去，根据计算出的 b_j，依据 (28) 式计算 a_i，这样不断地重复，直到 a_i、b_j 的值相对稳定时为止。第四步：用 (24) 式计算要模拟的两城市间的航空交通量。显然，计算 (24) 式所需要的参数及变量的值都已确定。第五步：用模拟的两城市间的航空交通量，依据 (4) 式计算模拟的交通总成本 (记作 C_1)。比较模拟的交通总成本和已经发生的交通总成本，如果前者大，即 $C_1 > C_0$，则增加的 β 值，否则，降低 β 的值。然后返回到第三步。

模式运作的停止条件是，当模拟的交通总成本与已经发生的交通总成本之差在一个可接受的量时，本文设定为 1%。此外，由于各城市自身之间的航空交通量为零，在模拟时，给其飞行时间取一个较大的数，本文取为 100 000 分钟。

运用模拟方法计算的七城市起终点对的航空旅行分布位于表 1 的“模拟量 (1)”中，“相对误差 (1)”是针对模拟量的，它是模拟量减去已知量的绝对值与已知量之比。由于模拟量和已知量的对称性，所以仅有 21 个相对误差是实质性的。21 个相对误差值中，有 9 个在 0-0.1 之间，约占 42.8%，误差在 0.2 以下的 13 个，约占近 60%。有两个很大，误差在 0.8-1 之间。此外，模拟中，$\beta = 0.0075$，$\sigma = 21.33$,说明消费者的偏好变化大，降低了航空交通中成本因素的影响力。

本文第二部分建立的双约束重力模型具有较苛刻的前提条件，包括：旅客是划一的，具有相同的偏好，且其偏好遵从相同的正态分布；目的地是划一的，对于每一个旅客的吸引力相同；所有的旅客只考虑在一个交通网络中运行。事实上，这些条件的相反方面恰恰为模式模拟的误差提供了解释。首先是旅客偏好的差异；其次是目的地之间的差异性；第三是交通工具的替代性。可以设想，有大量的不同旅客在公路、铁路和航空交通三种运输方式中运行。较近行程的旅客多采用公路交通，远距离的乘坐火车，而旅程远，同时要求速度快的旅客则乘坐航空班机，当然这需要有较高的支付能力。可是，现在我们获得的是在这个系统内发生的一套仅仅表现在航空交通方面的旅行分布数据，在这些数据背后发生的交通工具的替代性，在本文第二部分的模型中并没有得到反映。另外，航空旅行分布还受商务、行政等方面的影响，因此有必要在分析时挖掘这上述几个方面的潜在作用。可以认为，当两地间的旅行存在较特殊的交通联系，同时这种联系导致了模型对现实较大的背离时，可以适当调整旅行时间 (成本) 来实现模型对数据更好的描述。对于前面的模拟，上海—昆明和武汉—昆明之间的模拟误差较大，同时模拟量远大于已知量，故可以将这两条航行的旅行成本调整得大一些。本文还对其他一些航线的飞行时间进行了一些调整，在表 1 中用括号表示，采用调整后的飞行时间计算的模拟量在“模拟量 (2)”栏中给出，同时相应模拟误差在“相对误差 (2)”中给出。从表 1 可以看出，一些城市间飞行时间的调整幅度还是比较大的。

本文提出下面的非线性规划模型以求得最佳的 c_{ij}：

$$\underset{c_{ij}}{Min} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(\left(T_{ij} - a_i b_i O_i e^{-\beta c_{ij}} \right) / T_{ij} \right)^2 \tag{31}$$

约束条件包括 (28) 式、(29) 式和 (32) 式：

$$C_0 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} a_i b_j O_i e^{-\beta c_{ij}} \tag{32}$$

非负条件为：$c_{ij} \geq 0$。其中：T_{ij} 为已知量，β 为调整 c_{ij} 前的模拟值，c_{ij} 为推求量，其他符号的定义如前。

本文采用了如下方法求解 c_{ij} 的近似解：第一步：按照前面的模型运作程序，用原始的旅行时间 (成本) c_{ij} 计算出 a_i、b_j 和 β。第二步：求解 (31) 式，约束条件仅为非负条件。第三步：用求得的旅行时间 (成本) c_{ij}，按照前文介绍的模型运作程序，计算出 a_i、b_j 和 β。第四步：用调整旅行时间 (成本) c_{ij} 后的 a_i、b_j 和 β，按照 (24) 式计算要模拟的两城市间的航空交通量，并求出模拟误差。一般情况下，此时的模拟误差基本能控制在 10% 以内。如果仍没有达到要求的模拟精度，则返回第二步，直到达到要求为止。

台湾大学的华昌宜教授在 1990 年的香港地理学术研讨会上提出用已知的旅行分布推测相应的单位旅行成本分布 (华昌宜，空间系统互动模式的推导与数值解法，1990 年香港地理学术研讨会论文)，本文关于调整飞行时间的想法受到了他的论文的启发。

第二部分建立的模型的另一个较重要的方面是关于终点服务价格 (p_j) 和起点消费者剩余 (v_i) 的意义。显然，这两个指标越大的城市，在这个考虑了起终点出行和到达量的交通网络系统中的优越性越大。本文的模型运行能够获取各城市的 p_j (根据 (26) 式计算 p_j)，不能获取到 v_i，但能获取到 $(v_i - u)$ (根据 (25) 式计算 $(v_i - u)$)，即消费者剩余与其均值之差的量，它能够反映一个城市在这一方面的优劣性。从 (24)~(26) 式可以看出，给 $(v_i - u)$各增加或减少一个常数，同时给 p_j 减少或增加这个常数，旅行分布不变。正像第二部分强调的，本文的这些终点服务价格和起点消费者剩余是一组相对值，它们是正是负并不重要。图 1 表示了北京、上海等七个城市在 2003 年的航空旅客分布情况。武汉处于这个网络的中心，从表 1 知，调整飞行时间前后，武汉的终点服务价格最大，对应的 $(v_i - u)$ 也最大，模型给出的武汉在网络中的优越性与图 1 显示的一致。从图 1 也能够看出，除了武汉外西安是另一个在这七个城市组成的航空网络中处境好的城市，表 1 给出的关于西安的终点服务价格在调整前后均是大于其他城市的而小于武汉的，同时 $(v_i - u)$ 也雷同的结论基本上与图 1 显示的一致。应该说模型给出的结论比图 1 显示的更具有说服力，这是因为模型不仅考虑到了网络中各个城市的空间位置，也考虑了它们作为起终点之大小所起的作用。从图 1 还能够看出，北京在这个网络的顶部，离几个大城市都比较远，模型反映的与这个事实也完全一致。

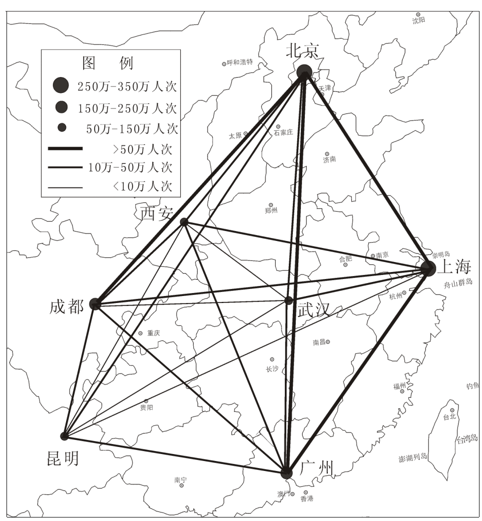

图 1 2003 年中国七个城市航空旅客分布图

Fig. 1 Trip distribution on airlines between seven cities in China in 2003

通过查看飞行时间调整量，模型还能够反映如果不用模型可能难以发现的问题。比如：上海、广州、武汉三个城市，对昆明调整后的飞行时间明显地大于调整前的，暗示他们对昆明航空交通的偏好较差，一个方面可能是其他交通工具的替代性存在，二是这三个城市的旅客对昆明可能缺乏偏好。还有一个原因，就是商务、旅游、行政等方面的特殊性，也包括旅客在较大范围内，包括国际航线中的旅行组合。关于西安与武汉之间飞行时间的调整，交通工具替代性因素可能较为重要，这两个城市之间的距离较近，对于很多人而言，也许乘坐火车更合适。武汉与上海之间的

飞行时间显著地调小，除了旅客的偏好之外，主要原因在于，相对于其他城市间航空旅行与其它交通旅行的替代性而言，上海—武汉之间的航空旅行更具有优势。事实上，上海与武汉之间的铁路、公路联系均较差，从而给航空旅行带来了更多的机会。此外，在航空网络中，城市作为起点与作为终点的竞争力可能会有差别，比如昆明作为终点的竞争力 (p_j) 排在第三位，而作为起点的竞争力 ($v_i - u$) 却排在第六位。从本文的分析能够理解到，前者是其他城市对昆明竞争性选择的结果，而后者是昆明对其他城市竞争性选择的结果。

4　结论和讨论

(1) 在假定旅行者具有划一的理性确定性效用的前提下，如果把旅行这一事件的价值分成三部分：一部分分配给旅客交通这一环节，一部分分配给各个旅行终点，一部分为旅行者的净效用 (或消费者剩余)，那么就可以构造一对线性交通规划模型，其一是在满足流出、流入守恒的条件下进行交通优化，使所有旅行者去各个终点获取的总效用减去交通费用后的净值达到最大；另一是当旅行者的消费者剩余和各终点服务价格之和不小于旅行者在各终点获取的总效用减去交通费用后的净值时，如何使消费者的总剩余与在所有终点的费用之和达到最小。当且仅当旅行分布使得旅行价值恰好等于各个起讫点对的消费者剩余、终点服务价格与它们之间的交通成本之和时，所有旅行者去各个终点获取的总效用减去交通费用后的净值达到最大，消费者剩余和所有终点的总旅行收入达到最小，同时二者相等。一个完备的市场能够合理地调整各终点服务价格从而确定上述最优的旅行分布。

(2) 在假设起因于内心重复权衡的随机效用条件下，市场机制仍旧调整各终点服务价格，进而调整起点的消费者剩余，从而确定旅行分布。当假设旅行者的效用遵从正态分布，并用 Logistic 函数近似这个正态分布时，就可以获得双约束指数型重力模式。如果旅行者效用趋于确定，即效用分布的标准差趋于零时，由双约束重力模式确定的旅行分布趋于由交通模型确定的旅行分布。双约束重力模式中平衡因子的平衡作用是市场调整终点服务价格和旅行者的消费者剩余的结果。起点消费者剩余和终点服务价格这两个指标越大的起讫点，在这个考虑了起终点出行和到达量的交通网络系统中的优越性越大。

(3) 案例研究表明，模型对交通网络流分布具有多方面的分析功能。各终点的差异性、消费者偏好的不同、交通工具的替代性和旅行目的的差异性等可以导致一些较大的模拟误差，这些差异性可以采用对起、终点对的单位交通费用的调整来体现，从而达到较好的模拟和分析效果。

本文的分析方法虽然可以测量到旅客偏好的差异、目的地之间的差异、交通工具的替代性对旅行分布的影响，但仅仅从模式上还不能判断出究竟是这三个中的哪一个，以及各自的影响份额是多少，而这些问题恰恰是十分重要的，有待于今后深入研究。

参考文献 (References)

[1] Hitchcock F L. The distribution of a product from several source to numerous localities. Journal of Mathematics and Physics, 1941, 20: 224-230.
[2] Dorfman R, Samuelson P A, Solow R M. Linear Programming and Economic Analysis. New York: McGraw-Hill, 1958.
[3] Sen A, Smith T. Gravity Models of Spatial Interaction Behavior. Heidelberg: Springer, 1995.
[4] Batten F, Boyce E. Spatial interaction, transportation, and interregional commodity flow models. In: Nijkamp P. Handbook of Regional and Urban Economics, Volume 1, Regional Economics. North-Holland: Amsterdam, 1986. 357-406.
[5] Wilson G. A statistical theory of spatial distribution model. Transportation Research, 1967, 1: 253-269.
[6] Wilson G. Entropy in Urban and Regional Modeling. London: Pion, 1970.
[7] Wilson G, Bennett R J. Mathematical Models in Human Geography and Planning. John Wiley & Sons, 1985.
[8] Evans P. A relationship between the gravity model for trip distribution and the transportation problem in linear programming. Transportation Research, 1973, 7: 39-61.

[9] Golob T F, Beckmannn M J. A utility model for travel forecasting. Transportation Science, 1971, 5: 79-90.
[10] Beckmannn M J. The economic activity equilibrium approach. In: Bertuglia C S, Leonardi G, Occelli S. Urban System: Contemporary Approaches. Croom Helm, 1987. 79-135.
[11] Beckmannn M J, Wallance J P. Evaluation of user benefits arising from changes in transportation systems. Transportation Science, 1969, 3: 344-351.
[12] Zhu Dewei, Liang Jinshe. Quantitative analysis of mass goods and material's supply-sale location and its extension. Acta Geographica Sinica, 1986, 41(4): 350-359. [朱德威, 梁进社. 大宗物资供销区位的定量分析及其引申. 地理学报, 1986, 41(4): 350-359.]
[13] Ford Jr. L R, Fulkerson D R. A simple algorithm for finding maximal network flow and an application to the hitchcock problem. Canad. J. Math., 1957, 9: 210-218.
[14] Guan Meigu, Zheng Handing. Linear Programming. Jinan: Shandong Science and Technology Press, 1983. [管梅谷, 郑汉鼎. 线性规划. 济南: 山东科学技术出版社, 1983.]
[15] Dantzig D B, Ford Jr L R, Fulkerson D R. A primal-dual algorithm for linear programs, linear inequalities and related systems. In: Annals of Mathematics Study 38. Princeton University Press, 1956.
[16] Domencich T, McFadden D. Urban Travel Demand: A Behavioral Analysis. North-Holland: Amsterdam, 1975.
[17] McFadden D. The mathematical theory of demand models. In: Stopher P R, Meyburg A. Behavioral Travel Demand Models. Lexington Books, Lexington Mass, 1976, 305-314.
[18] McFadden, D. The measurement of urban travel demand. Journal of Public Economics, 1974, 3: 303-328.
[19] Jin Fengjun. A study on network of domestic air passenger flow in China. Geographical Research, 2001, 20(1): 31-39. [金凤君. 我国航空客流网络发展及其地域系统研究. 地理研究, 2001, 20(1): 31-39.]
[20] Zhou Yixing, Hu Zhiyong. Looking into the network structure of Chinese urban system from the perspective of air transportation. Geographical Research, 2002, 21(3): 276-286. [周一星, 胡智勇. 从航空运输看中国城镇体系的空间网络结构. 地理研究, 2002, 21(3): 276-286.]
[21] Yang Qi. A model for interregional trip distribution in China. Acta Geographica Sinica, 1990, 45(3): 264-274. [杨齐. 区域客流分布模型的研究. 地理学报, 1990, 45(3): 264-274.]

Linking the Doubly Constrained Gravity Model and the Transportation Model for Trip Distributions: A New Approach

LIANG Jinshe[1], HE Canfei[2], ZHANG Hua[1]
(1. *School of Geography, Beijing Normal University, Beijing* 100875, *China*;
2. *Department of Urban and Regional Planning, Peking University, Beijing* 100871, *China*)

Abstract: The premise condition of doubly constrained gravity model is the same as that of transportation model in linear programming, but the results derived from the models are diverse because of the different behavior assumptions of travelers. It has been proved by Evans that the parameter β in doubly constrained gravity model represents the relative importance of total transportation costs and the possibility of the trip distribution. Based on dual programming of transportation problem and uncertain utility method put forward by Beckmannn & Wallance and Golob & Beckmannn, this study establishes the relationship between doubly constrained gravity model and transportation model. This paper discovers that the parameter β in doubly constrained gravity model goes to positive-infinity and the total transportation costs of trip distribution derived from doubly constrained gravity model meet minimum level as the standard deviation of probability density distribution function for traveler's utility goes to zero. This paper points further out that the balance factors in doubly constrained gravity model reflect market adjustment of the price for travel ends services and the consumer surplus of travelers. Using this method, trip distribution on airlines between seven cities in China in 2003 is simulated. The result also indicates that the difference of travel ends and consumer preferences, substitution of transportation tools, and variety of travel purposes may lead to simulation error and the error can be reduced by transportation cost parameter adjustment.

Key words: transportation model; doubly constrained gravity model; dual programming; balance factor; transportation cost adjustment